

Università degli Studi di Verona

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica Applicata

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Una panoramica sulla teoria ergodica
e i biliardi**

Candidato:
Davide Murari
Matricola VR397955

Relatore:
Nicola Sansonetto

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1	SISTEMI DINAMICI: Definizioni e primi esempi	7
1.1	Classificazione dei Sistemi Dinamici	7
1.2	Moto uniforme sul Toro \mathbb{T}^2	8
1.3	Gatto di Arnol'd (Automorfismo algebrico di \mathbb{T}^2)	10
1.4	Trasformazione del panettiere	11
1.5	I biliardi	14
2	Ergodicità	17
2.1	Teorema della ricorrenza	18
2.2	Teorema ergodico	20
2.3	Proprietà di un sistema ergodico	21
2.4	Alcuni esempi di sistemi ergodici	25
2.5	Sistemi mescolanti	27
3	Superfici di Traslazione	31
4	Biliardi	39
4.1	Dalla meccanica ai biliardi sui triangoli	40
4.2	Biliardi su triangoli	42
4.3	Biliardi razionali	45
4.3.1	Costruzione di Katok-Zemliakov	45
4.3.2	Biliardo sul quadrato	48
5	Appendice: Implementazioni numeriche	51
5.1	Traslazione sul toro	51
5.2	Automorfismo algebrico di \mathbb{T}^2	52
5.3	Trasformazione del panettiere	53
	Bibliografia	55

Introduzione

L'universo in cui viviamo è in continuo cambiamento, per questo motivo per fornire dei modelli, delle interpretazioni o delle previsioni è necessario confrontarsi con l'analisi dell'evoluzione temporale di processi, proprietà o quantità. Questi processi evolutivi prendono il nome di **sistemi dinamici**. La ricerca nel campo dei sistemi dinamici è molto attiva al momento perché essi coinvolgono varie applicazioni, come ad esempio le previsioni metereologiche, le dinamiche evolutive delle malattie infettive, l'andamento del numero di individui presenti sul pianeta Terra o più semplicemente l'evoluzione della posizione di un grave in caduta libera.

Alcune proprietà dei sistemi dinamici sono legate alla loro evoluzione per tempi arbitrariamente lunghi (in un senso preciso che definiremo). In questo ambito è più semplice e probabilmente più interessante lo studio di proprietà medie di grandezze e osservabili. Questo è l'ambito di studi della **teoria ergodica**. Nei prossimi capitoli introdurremo alcuni teoremi e risultati legati a questo settore di ricerca con delle applicazioni in particolare ai biliardi.

In questa tesi useremo anche implementazioni numeriche (con MATLAB) per simulare l'evoluzione di alcuni sistemi e mostrarne le proprietà caratteristiche. Infine, applicheremo la teoria esposta nel primo e secondo capitolo ai biliardi, per i quali sarà necessario introdurre ed approfondire le superfici di traslazione (terzo capitolo).

Capitolo 1

SISTEMI DINAMICI: Definizioni e primi esempi

In questo capitolo introdurremo il concetto di sistema dinamico, individuando alcune proprietà che permettono di classificarli. Accanto a queste nozioni teoriche studieremo alcuni esempi anche con l'aiuto di metodi numerici (con MATLAB).

1.1 Classificazione dei Sistemi Dinamici

Definizione 1.1.1. La terna (M, μ, ϕ) è detta **sistema dinamico classico**. In essa, M è una varietà differenziabile¹ compatta, μ una misura regolare normalizzata su M e $\phi := \{\phi^t\}$, $t \in \mathbb{R}$ o $t \in \mathbb{Z}$, un gruppo di diffeomorfismi su M , parametrizzato da t , che preservano la misura. Se $t \in \mathbb{R}$ parleremo di sistemi continui, altrimenti se $t \in \mathbb{Z}$ li definiremo sistemi discreti.

Più esplicitamente si ha che $\phi : \mathbb{K} \times M \rightarrow M$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{Z} è tale che

$$\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}, \quad \phi^0 = id,$$

$$\mu(\phi^{-t}(A)) = \mu(A)$$

per ogni t, s in \mathbb{R} o \mathbb{Z} , e ogni $A \subset M$ misurabile. Con la notazione $\phi^{-t}(A)$ intendiamo l'insieme

$$\phi^{-t}(A) := \{x \in M : \phi^t(x) \in A\},$$

pre-immagine di A mediante ϕ .

La struttura di varietà differenziabile per lo spazio M di un sistema dinamico è talvolta una richiesta eccessiva. Può essere preferibile introdurre una classe più ampia di sistemi dinamici, detti **sistemi dinamici astratti**, in cui M è uno spazio astratto su cui è definita una misura μ e quindi dove non viene richiesta la

¹Diciamo **varietà topologica** M uno spazio topologico di Hausdorff, avente una base numerabile di aperti, in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo allo spazio euclideo \mathbb{R}^n . Se inoltre tale varietà fosse dotata di un atlante differenziabile, allora diremmo M **varietà differenziabile**. Un atlante si dice differenziabile se per ogni coppia $(U, \psi), (\bar{U}, \bar{\psi})$ di carte locali dell'atlante A tali che $\psi(U) \cap \bar{\psi}(\bar{U}) \neq \emptyset$ si ha che $\bar{\psi}^{-1} \circ \psi$ è diffeomorfismo.

differenziabilità delle applicazioni ϕ^t , ma solamente l'invertibilità quasi ovunque e che preservino la misura.

Nel caso dei sistemi dinamici continui, possiamo stabilire alcuni istanti temporali specifici (spesso chiamati tempi d'arresto o di evento) e associare l'equivalente sistema dinamico discreto corrispondente a tale sottosequenza discreta di tempi. Questa è una tecnica tipica dell'analisi dei **Biliardi** sui quali ci soffermeremo nel Capitolo 4.

Come spesso accade in matematica, mediante degli opportuni isomorfismi, possiamo trattare oggetti distinti come se fossero lo stesso. Nel campo dei sistemi dinamici si ha la seguente

Definizione 1.1.2 (Isomorfismo di sistemi dinamici). Due sistemi dinamici (M, μ, ϕ) e (N, ν, ψ) si dicono **isomorfi** se esiste una mappa $h : M \rightarrow N$ invertibile quasi ovunque tale che

- preserva la misura, ossia $\nu(h(A)) = \mu(A)$ e $\mu(h^{-1}(B)) = \nu(B)$ per ogni $A \subset M$ e $B \subset N$ misurabili;
- commuta con la dinamica, ovvero $\forall t : \psi^t \circ h = h \circ \phi^t$.

Nelle seguenti sezioni useremo queste definizioni per descrivere alcuni sistemi dinamici di esempio. Descriveremo il moto uniforme sul toro, il gatto di Arnol'd, la trasformazione del panettiere e forniremo un'introduzione ai biliardi.

1.2 Moto uniforme sul Toro \mathbb{T}^2

Come esempio introduttivo, vediamo il moto a velocità costante sul toro \mathbb{T}^2 . In questo caso come terna caratterizzante il sistema dinamico a tempo continuo, consideriamo la seguente:

$$\begin{aligned} M &:= \mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \\ \mu &= \text{misura di Lebesgue} \\ \phi^t(x, y) &= (x + at, y + bt) \pmod{1} \quad (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Questo sistema è classico, invertibile e continuo. Il dominio M è localmente omeomorfo ad \mathbb{R}^2 . Dato un atlante differenziabile A di \mathbb{T}^2 (che esiste in quanto varietà differenziabile), dalla linearità dell'applicazione $\phi^t(x, y) = (x + at, y + bt)$ sul toro segue la differenziabilità dell'applicazione $f = \psi_2^{-1} \circ \phi \circ \psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $(\psi_1, U_1), (\psi_2, U_2)$ sono due carte locali di A . Di conseguenza l'applicazione $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ è differenziabile. Essa è inoltre invertibile. La sua particolarità, che si può verificare anche dalla simulazione numerica riportata nella Figura 1.1, è che se $\alpha = a/b$ è razionale, ossia $\alpha = p/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, allora tutte le traiettorie sono periodiche, altrimenti nel caso α sia irrazionale si addensano sul toro (vedremo nella Sezione 2.3 che sotto tali ipotesi il sistema è ergodico).

Nell'appendice a fine tesi (Capitolo 5) è riportata una possibile implementazione numerica di questa trasformazione (scritta in MATLAB). Piuttosto che il codice, è importante analizzare i riscontri visivi che esso ci permette di avere nei due casi $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, come evidenziato nella Figura 1.1.

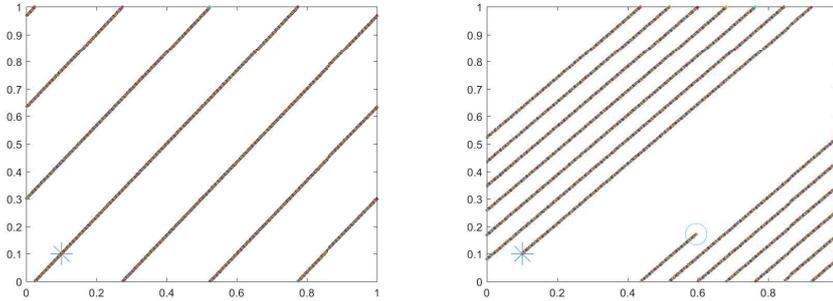


Figura 1.1: A sinistra si può notare che, fissato un $\alpha \in \mathbb{Q}$ il moto è periodico, in questo caso fissata una velocità $v = (\frac{1}{800}, \frac{1}{600})$. Il moto parte dal punto iniziale in corrispondenza dell'asterisco e ci ritorna dopo esattamente 2400 iterazioni, analizzando l'evoluzione della simulazione numerica (infatti $T = \frac{p}{a} = \frac{q}{b} = 2400$). A destra invece si può notare come nel caso $v = (\frac{\sqrt{3}}{800}, \frac{\sqrt{2}}{600})$ vi sia un addensamento in \mathbb{T}^2 data l'irrazionalità del loro rapporto

Come ci si aspettava, la parte sinistra della Figura 1.1 conferma il comportamento periodico del sistema nel caso di $\alpha \in \mathbb{Q}$. Nella parte destra della Figura 1.1 invece è evidenziato l'addensamento nello spazio di partenza dopo un sufficiente numero di iterazioni. In questo caso l'addensamento corrisponde ad una velocità $v = (\frac{\sqrt{3}}{800}, \frac{\sqrt{2}}{600})$. Il moto parte dal punto indicato con un asterisco in basso a sinistra e termina dopo 3000 iterazioni nel punto centrale indicato con un cerchio. Se si proseguisse andrebbero ad infittirsi le rette così da avere punti della traiettoria² in un qualunque aperto da noi scelto nel dominio.

Per certificare che si verifica effettivamente un addensamento in \mathbb{T}^2 ci si può rimandare al prossimo capitolo, dove verrà introdotta l'ergodicità e mostrato che questa trasformazione è ergodica. Tale risultato implica infatti l'addensamento nello spazio.

L'esempio della traslazione sul toro piatto ci sarà molto utile in seguito analizzando le dinamiche sui biliardi (Capitolo 4). Infatti una generica traiettoria del sistema dinamico 1.2 è un flusso geodetico sul toro (verrà definito in 3.0.5) e corrisponde alla traiettoria di una generica particella su un biliardo ideale.

Per mostrare invece che la parte a sinistra della Figura 1.1 simula la reale evoluzione del sistema, ecco la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.1 (Traslazione periodica sul Toro). *La traslazione sul toro*

$$\phi^t(x, y) = (x + v_x t, y + v_y t) \pmod{1}$$

è periodica se e solo se esiste una coppia $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ tale che $av_x + bv_y = 0$ (o equivalentemente $\alpha = v_x/v_y \in \mathbb{Q}$).

²Ricordiamo che per traiettoria di x si intende l'insieme $T_x = \{y \in M \mid \exists t \in \mathbb{R}, \phi^t(x) = y\}$, nel caso di un sistema dinamico continuo.

Dimostrazione. Nella dimostrazione, per semplicità verrà usata la seguente notazione: $x \bmod 1 = [x]$.

Supponiamo la trasformazione sia periodica, allora $\exists T > 0$ tale che

$$[x + v_x T, y + v_y T] = (x, y).$$

Ma ciò significa che $[Tv_x] = [Tv_y] = 0$ dato che $[x] = x$ nello spazio in analisi. Segue che esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $Tv_x = m$ e $Tv_y = n$. Ma allora la tesi è immediata dato che $T = \frac{m}{v_x} = \frac{n}{v_y}$ e quindi $nv_x - mv_y = 0$.

Per dimostrare la direzione opposta, supponiamo per assurdo che non esista $T > 0$ tale che $[x + Tv_x, y + Tv_y] = (x, y)$. Quindi necessariamente non esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $Tv_x = m$ e $Tv_y = n$, il che è assurdo dato che ciò porterebbe ad avere una contraddizione con l'ipotesi di esistenza di $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ che rendano vera $av_x + bv_y = 0$. Quindi il sistema è periodico. □

1.3 Gatto di Arnol'd (Automorfismo algebrico di \mathbb{T}^2)

Il Gatto di Arnol'd, anche noto come Automorfismo algebrico del toro, è un sistema non lineare a tempo continuo. La non linearità è dovuta alla riduzione del sistema al toro. Esso è caratterizzato dalla seguente terna:

$$M := \mathbb{T}^2$$

$$\mu = \text{misura di Lebesgue}$$

$$\phi(x, y) = (x + y, x + 2y) \bmod 1 = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bmod 1, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il codice MATLAB scritto per implementare questo secondo esempio e quindi ricavare i seguenti grafici, è riportato nel Capitolo 5.

Per descrivere questa trasformazione più in dettaglio, sono necessarie nozioni più avanzate, alcune delle quali le introdurremo nel prossimo capitolo (mixing ed ergodicità). Comunque nella Figura 1.2 possiamo già notare come dopo poche iterazioni la dinamica si addensa sullo spazio \mathbb{T}^2 .

Gatto di Arnol'd

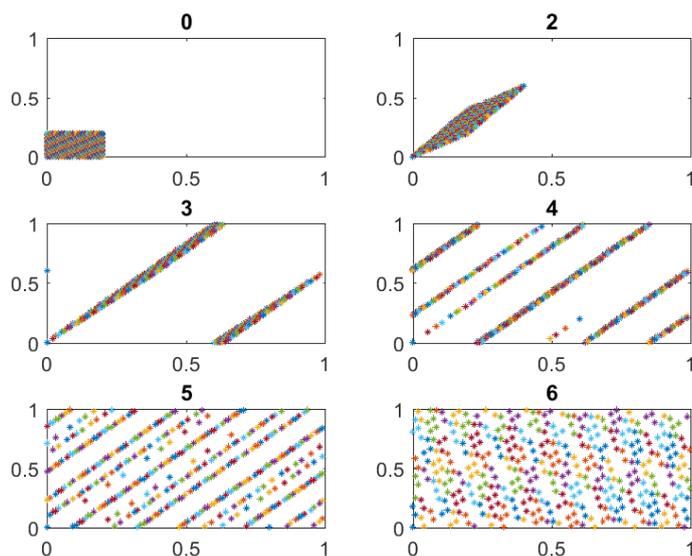


Figura 1.2: In questa simulazione numerica, partendo dal quadrato $Q = [0, 0.2] \times [0, 0.2]$, viene applicata 5 volte consecutive la mappa del gatto, fino ad iniziare ad addensarsi già alla quinta iterazione. Aumentando il numero di iterazioni, andrà a “riempire” tutto il toro \mathbb{T}^2 .

1.4 Trasformazione del panettiere

Vediamo ora un sistema leggermente più complesso del precedente: la mappa del panettiere. La terna caratterizzante il sistema dinamico a tempo continuo è la seguente:

$$M := [0, 1) \times [0, 1)$$

$$\mu = \text{misura di Lebesgue}$$

$$\phi(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (2x - 1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nella Figura 1.3 è mostrata l'iterazione della mappa del panettiere per 5 volte, applicata ad un quadrato iniziale. Il codice di tale implementazione è visibile nel Capitolo 5. Emerge chiaramente come il quadrato iniziale vada ad espandersi e diluirsi uniformemente sullo spazio a sua disposizione, proprietà caratteristica dei sistemi mescolanti che vedremo nella Sezione 2.5.

Mappa del Panettiere

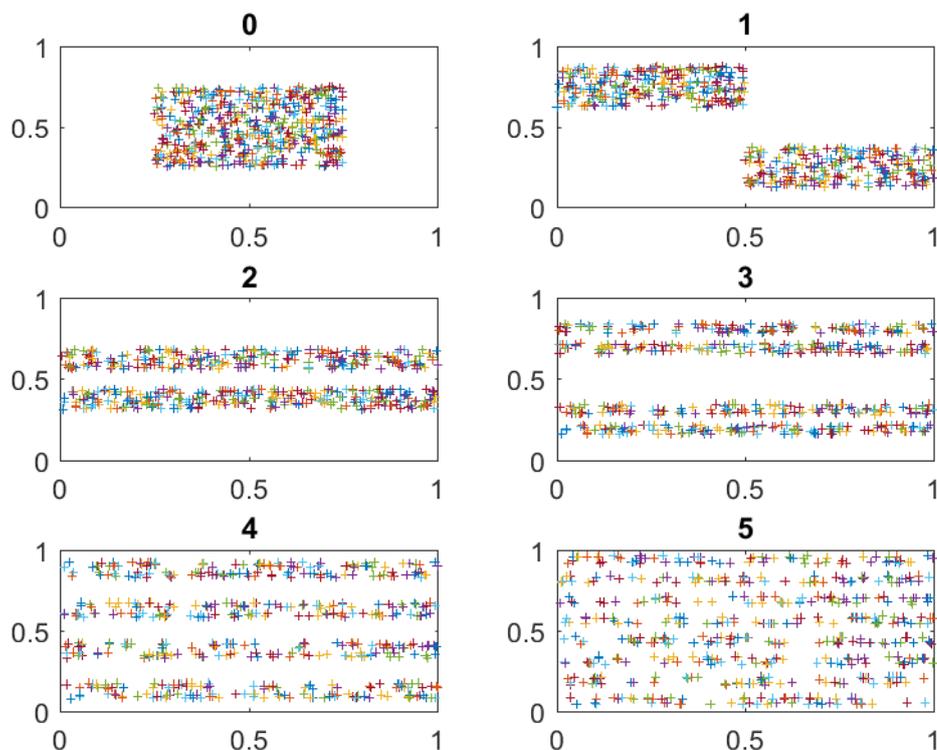


Figura 1.3: Simulazione mappa panettiere

Usiamo il concetto di **isomorfismo** tra sistemi dinamici. Definiamo gli schemi di Bernoulli che sono un sistema dinamico isomorfo alla trasformazione del panettiere.

Definizione 1.4.1 (Schemi di Bernoulli). Definiamo un *alfabeto*, ossia un insieme finito I di simboli del tipo

$$I = \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Costruiamo quindi lo spazio delle fasi del sistema astratto

$$M = I^{\mathbb{Z}} = \{x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), x_i \in I\}.$$

Per costruire la misura, prendiamo n numeri reali positivi a somma 1:

$$p_0, \dots, p_{n-1} \geq 0, \quad \sum_{l \in I} p_l = 1$$

intendendo che

$$p_l = \mu(C_k^l) \text{ dove } C_k^l = \{x \in M \mid x_k = l\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad l \in I.$$

Chiaramente $M = \bigcup_{l \in I} C_k^l$ e quindi essendo a due a due disgiunti tali insiemi, si ha che

$$\mu(M) = \sum_{l \in I} \mu(C_k^l) = \sum_{l \in I} p_l = 1.$$

Quindi μ è una misura normalizzata e ben definita. A questo punto non resta che definire un automorfismo ϕ su M , scegliamo quindi quello che ci servirà per mostrare l'isomorfismo con la mappa del panettiere. Precisamente diciamo $x' = \phi(x)$ con

$$x'_k = x_{k+1}$$

che è quindi uno shift all'indietro.

Gli insiemi C_k^l detti *cilindri elementari*, possono essere utilizzati come elementi generatori di una struttura di σ - algebra su M .

Teorema 1.4.1. *La trasformazione del panettiere e lo schema di Bernoulli $B_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ sono isomorfi.*

La seguente dimostrazione è una rielaborazione di ciò che si può trovare nella Proposizione 2.6 di [4].

Dimostrazione. Per mostrare il precedente risultato è necessario individuare un isomorfismo $h : M \rightarrow N$ tra i due spazi delle fasi, che preservi la misura. Intuitivamente, lo schema di Bernoulli $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ può essere pensato come una astrazione della trasformazione del panettiere che si focalizza solo sulla posizione che un generico punto assume sul quadrato unitario. Definiamo quindi

$$A_0 = \left\{ x = (a, b) \in M \mid a < \frac{1}{2} \right\}, \quad A_1 = M \setminus A_0.$$

Sia lo spazio delle fasi dello schema di Bernoulli denotato con N . Ora associamo ad $x \in M$ la sua "storia", ovvero

$$y = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots) \in N, \quad y_t = l \quad \text{se} \quad \phi^t(x) \in A_l, \quad l \in \{0, 1\}.$$

Naturalmente questa è un'applicazione invertibile infatti qualunque sia la sequenza y di caratteri 0 e 1, esiste sempre una $x \in M$ che la realizza, ossia che ad un generico tempo t si abbia che $\phi^t(x) \in A_{y(t)}$. Resta da verificare che tale applicazione commuti con la dinamica e preservi la misura. Essendo vera la relazione tra le componenti di y e la posizione che il punto x assume progressivamente nel dominio M , apportare prima un avanzamento nel tempo in un dominio piuttosto che nell'altro è indifferente, quindi la commutatività segue immediatamente.

Per quanto riguarda la misura, nel campo degli schemi di Bernoulli (nei quali indichiamo la misura con ν) può essere intesa come la probabilità che una componente di y assuma valore 0 o 1. Siccome una generica stringa $y \in N$ può essere vista come intersezione di cilindri elementari ed essendo i "lanci" di uno schema di Bernoulli supposti indipendenti, abbiamo la validità della seguente relazione:

$$\mu(h^{-1}(B)) = \nu(B), \quad \nu(h(A)) = \mu(A), \quad \forall A \subset M, B \subset N$$

□

1.5 I biliardi

Consideriamo una classe di sistemi in grado di modellizzare molte applicazioni fisiche e non, importante anche di per sè e all'interno della matematica stessa: *i biliardi*. Questa parte introduttiva è una rielaborazione dalle dispense [20] per il corso “Mathematical billiards: ergodicity and renormalization, from polygons to the Ehrenfest model” tenuto alla scuola estiva in fisica-matematica di Ravello nel 2017.

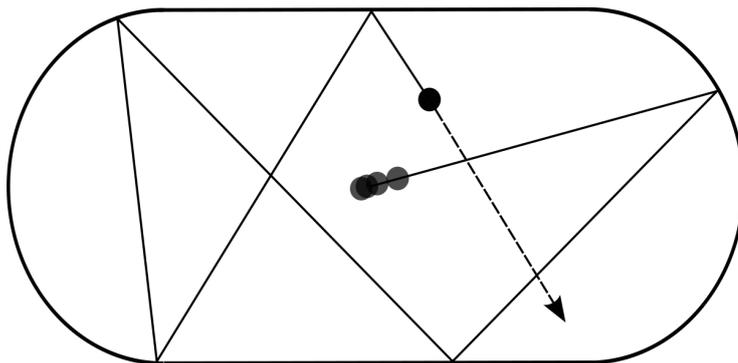


Figura 1.4: Esempio di biliardo caotico, detto stadio di Bunimovich. [7], [3]. Immagine presa da [17].

Parlando di biliardi, facciamo riferimento a sistemi dinamici in cui si studia l'evoluzione della posizione di una particella di massa unitaria su un tavolo ideale $Q \subset \mathbb{R}^2$ (regione limitata e connessa) con barriera, ∂Q , curva regolare a tratti. Il tavolo è considerato ideale nel senso che non è presente resistenza d'attrito e la particella subisce urti completamente elastici con le pareti (conservando così velocità costante in modulo tra un urto e l'altro con il bordo e definendo angoli con le tangenti al bordo, in corrispondenza dello stesso punto di collisione, congruenti). In altri termini la particella segue le leggi di riflessione dell'ottica geometrica.

Possiamo definire “tavolo del biliardo” la regione $Q \subset \mathbb{R}^2$ limitata da una curva chiusa $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, dove $\Gamma = \partial Q$ curva regolare a tratti, avente un numero finito o al più numerabile di singolarità.

Ad ogni particella mobile sul tavolo, è associata una coppia ordinata $(q, \theta) \in Q \times S^1$, dove q indica la posizione della particella sul biliardo, $q = (x, y)$, e θ la direzione nella quale si muove la particella. Prima di introdurre formalmente la terna caratteristica del sistema, mostriamo le condizioni che deve soddisfare la particella mobile nel biliardo:

1. In ogni punto $q \in Q \setminus \partial Q$ la direzione del moto è parallela al vettore $\theta \in S^1$ in quella posizione.
2. La traiettoria del biliardo è completamente caratterizzata dalla sequenza dei punti di collisione con la barriera ed un loro opportuno ordinamento, definendo così un equivalente sistema dinamico discreto avente come insieme dei tempi quelli di impatto con il bordo ∂Q .

3. In ogni punto $q \in \partial Q$ la traiettoria definisce un angolo di incidenza congruente a quello di emissione.

La terna caratterizzante il sistema dinamico continuo (#) è:

- $M = \overline{Q} \times S^1 \ni (q, \theta)$ spazio delle fasi, ove \overline{Q} è la chiusura di Q e S^1 è il cerchio unitario.
- ϕ^t è l'insieme di tutte le possibili traiettorie con i relativi versori direzione su M , parametrizzati dal tempo $t \in \mathbb{R}$.
- Sia $q = (x, y)$, dove x ed y indicano le coordinate cartesiane in Q e θ l'angolo tra il vettore velocità e una direzione prefissata. La misura $d\mu = dx dy d\theta$ è invariante.

Osservazione. Poiché si suppone di analizzare un sistema ideale in cui la velocità si conserva in modulo all'infinito, è sufficiente conoscere l'angolo che il vettore velocità forma con un'asse di riferimento assieme alla posizione della particella per caratterizzarne il moto.

È interessante capire come l'interazione con le pareti influenzi l'evoluzione temporale di questi sistemi dinamici. Utilizzeremo quindi la tecnica descritta sopra del passaggio al sistema dinamico discreto associato dato che siamo interessati agli urti e a come si susseguono.

Concludiamo questa prima introduzione ai biliardi definendo la mappa discreta che caratterizza la sequenza dei punti di collisione di una particella con la parete di un biliardo. Alcune classi particolari di biliardi verranno riprese nel Capitolo 4.

Tutti i punti di contatto della particella con la parete di Q costituiscono l'insieme:

$$N = \{\eta = (p, \theta) \in \partial Q \times S^1 \mid \langle \theta, n(p) \rangle \geq 0, \} \subset M,$$

dove $n(p)$ denota la normale entrante a Q in $p \in \partial Q$. Definiamo la mappa del biliardo $T : N \rightarrow N$ come $Tx = \phi^{\tau(x)}$ tale che

$$\tau(x) = \min\{t > 0 \mid \phi^t x \in N\}.$$

Questa mappa associa ad ogni punto di impatto con la parete, il successivo. Infatti dato in ingresso il punto x , con $x \in N$, si ha che $\tau(x)$ è il più piccolo tempo che deve trascorrere prima che da x si arrivi ad un altro punto $y = Tx$ che sta ancora in N . Essa permette quindi di definire un sistema dinamico discreto associato al sistema dinamico continuo (#). In particolare i tempi della discretizzazione sono quelli di impatto, ossia i t tali che $\phi^t(x) \in N$.

Capitolo 2

Ergodicità

L'aggettivo **ergòdico** ha origine etimologica discutibile, spesso lo si fa risalire al termine greco *ergódēs*, che significa “laborioso, difficile” oppure a *érgon* «opera; energia» e *hodós* «via, percorso» con riferimento al «percorso» del punto che rappresenta un sistema di «energia» data. Quanto esposto di seguito è una rielaborazione della parte introduttiva di [2].

Risalgono a L. Boltzmann (1844-1906) i primi tentativi di introdurre il concetto di **ergodicità** (si veda [5]). Già dalle sue prime ricerche sulla teoria cinetica dei gas, emerge l'ipotesi che lasciando evolvere liberamente un sistema e aspettando un tempo sufficientemente lungo, la dinamica visiterà tutti gli stati compatibili con lo stato energetico iniziale. Questa è nota come **ipotesi ergodica**.

L'ipotesi ergodica assunse un ruolo centrale soprattutto grazie al lavoro di J. W. Gibbs nel 1902 (si veda [10]). Essa ha permesso di collegare in un modo semplice e naturale una quantità associata ad un insieme come la media di una funzione sullo spazio delle fasi, con la media temporale di una grandezza fisica definita sul sistema stesso, che è possibile misurare.

A causa di alcuni controesempi all'ipotesi ergodica da parte di M. Plancherel e A. Rosenthal (si veda [6], [14], [15], [16], [21]), si cercò di correggere quanto ipotizzato introducendo l'**ipotesi quasi-ergodica**, ossia affermando che nel lungo periodo, la traiettoria di un sistema passa arbitrariamente vicino ad un qualsiasi punto nello spazio delle fasi. Tuttavia questo tentativo di correggere l'ipotesi ergodica è stato inutile principalmente per due ragioni:

- mostrare che un sistema è quasi-ergodico è molto complesso;
- l'ipotesi di quasi ergodicità non è sufficiente a provare l'uguaglianza tra media in fase e temporale, infatti alcuni sistemi quasi-ergodici non soddisfano tale proprietà.

Un punto di svolta a questo settore di studi è dovuta a G.D. Birkhoff, B. Koopman e J. Von Neumann agli inizi degli anni '30, i quali proposero l'idea di dimostrare l'uguaglianza tra le medie spaziale e temporale senza utilizzare direttamente l'ipotesi ergodica.

Con il passare del tempo, la teoria ergodica si è sviluppata come teoria all'interno dei sistemi dinamici, piuttosto che come teoria strettamente fisica legata alla meccanica statistica, che voleva fondare rigorosamente.

Intuitivamente si può definire ergodico un sistema dinamico il cui comportamento medio, nel lungo periodo, è lo stesso nello spazio e nel tempo. L'ergodicità può essere ben caratterizzata da quattro proprietà tra esse equivalenti, che permettono di focalizzare l'attenzione su aspetti diversi del sistema stesso (verranno enunciate e dimostrate equivalenti nella Sezione 2.3).

2.1 Teorema della ricorrenza

Introduciamo ora alcuni risultati di carattere generale sui sistemi dinamici, in particolare il Teorema della ricorrenza.

Definizione 2.1.1. Sia (M, μ, ϕ) un sistema dinamico. Sia $A \subset M$ μ -misurabile, diciamo che $x \in A$ è **ricorrente** in A se esiste un tempo T tale per cui $\phi^t(x) \in A$, $\forall t \geq T$.

Definizione 2.1.2 (Punti ricorrenti di A). Si dice insieme dei punti ricorrenti:

$$R_A = \{x \in A \mid \forall T > 0 \exists t \geq T : \phi^t(x) \in A, \},$$

Definizione 2.1.3 (Punti vaganti di A). Si dice insieme dei punti vaganti il complementare in A di R_A :

$$V_A = A \setminus R_A = \{x \in A \mid \exists T > 0 : \phi^t(x) \notin A, \forall t \geq T\},$$

Questa partizione ($A = R_A \cup V_A$) di ogni insieme $A \subset M$ che sia misurabile, è fondamentale in quanto ci consente di analizzare alcune proprietà dei sistemi dinamici più complicati, mediante la riduzione ai flussi uscenti da R_A o V_A , concentrandosi quindi su eventuali tempi di ritorno o tempi di uscita.

Naturalmente a questo punto nascono le seguenti domande: Quali sono quei sottoinsiemi dello spazio di partenza M nei quali sono certo di tornare? Esistono dei sottoinsiemi in cui ho la certezza che la dinamica non torni qualora parta proprio da essi? Se avessi la certezza di tornare in un dato sottoinsieme $A \subset M$, dopo quanto tempo lo farei? Le domande che ci si possono porre per analizzare un sistema dinamico generico sulla base della ricorrenza sono ancora molte, ma vediamo un risultato fondamentale a riguardo.

Teorema 2.1.1 (Teorema della ricorrenza). *Siano (M, μ, ϕ) un sistema dinamico qualunque e $A \subset M$ un insieme μ -misurabile. Allora l'insieme V_A dei punti vaganti è misurabile e ha misura nulla.*

La dimostrazione del Teorema della ricorrenza esposta qui di seguito è un'estensione di quella riportata nella Proposizione 3.1 di [4].

Dimostrazione. È sufficiente mostrare il risultato nel caso discreto, semplicemente perché se per ogni $x \in V_A$ esiste un tale $T \in \mathbb{N}$, naturalmente si può pensare T anche come un elemento dell'insieme continuo dei tempi. Sia quindi $T \in \mathbb{N}$, definiamo ora l'insieme

$$V_{T,A} = \{x \in A : \phi^t(x) \notin A \forall t \geq T\}$$

e vi associamo il nome di *insieme dei punti T-vaganti*. Essendo che affinché un generico $x \in A$ stia all'interno di V_A è sufficiente l'esistenza di un $T > 0$ tale che $x \in V_{T,A}$, allora abbiamo che naturalmente

$$V_A = \bigcup_{T \in \mathbb{N}^+} V_{T,A}.$$

A questo punto per garantire la misurabilità di V_A è sufficiente che, una volta fissato un $A \subset M$ misurabile, ogni $V_{T,A}$ sia misurabile. Questo perché gli insiemi misurabili di M formano una σ -algebra, e sono quindi chiusi rispetto ad unioni ed intersezioni numerabili. Riscriviamo ora l'insieme $V_{T,A}$ come intersezione numerabile di insiemi misurabili, così da ricondurci alla sua misurabilità:

$$V_{T,A} = A \cap \left[\bigcap_{t \geq T} \phi^{-t}(M \setminus A) \right].$$

La misurabilità di $V_{T,A}$ è quindi garantita per ogni T dato che A è misurabile, $M \setminus A$ è misurabile in quanto differenza di insiemi misurabili e quindi $\phi^{-t}(M \setminus A) = \{x \in M : \phi^t(x) \in M \setminus A\}$ è misurabile per definizione di funzione misurabile (la controimmagine di insiemi misurabili è misurabile). Resta quindi da mostrare che, data la non negatività della misura, $\mu(V_{T,A}) = 0$ per ogni T , con A insieme misurabile fissato. Si vede facilmente che gli insiemi $V_{T,A}$, $\phi^{-T}(V_{T,A})$, $\phi^{-2T}(V_{T,A})$ sono disgiunti, altrimenti se

$$\exists x \in \phi^{-kT}(V_{T,A}) \cap \phi^{-lT}(V_{T,A}) \neq \emptyset$$

e supponendo $k < l$ da ciò segue che

$$\phi^{kT}(x) \in V_{T,A} \cap \phi^{-(l-k)T}(V_{T,A})$$

il che è assurdo data la definizione di $V_{T,A}$. Infatti se $\phi^{kT}(x) \in V_{T,A}$ allora si ha che in particolare $x \in R_A$ dato che esiste un tempo $t = kT$ che fa ritornare x in A . Ma ciò è assurdo, dato che $V_{T,A} = M \setminus R_{T,A}$ con

$$R_{T,A} = \{x \in A : \exists t > T, \phi^t(x) \in A\}$$

e $x \in V_{T,A} \cap R_{T,A} = \emptyset$. Per la conservazione della misura in un sistema dinamico ben definito, si ha che $\mu(V_{T,A}) = \mu(\phi^{-kT}(V_{T,A}))$ ma l'unico modo per cui ciò possa essere verificato è che $\mu(V_{T,A}) = 0$ altrimenti $V_{T,A} \cap \phi^{-kT}(V_{T,A}) \neq \emptyset$ necessariamente, questo supponendo M spazio finito e data l'arbitrarietà di A . \square

Il significato intuitivo del Teorema del ritorno (Teorema 2.1.1) è che un sistema dinamico dopo un certo tempo torna certamente in un intorno arbitrariamente piccolo del punto iniziale (nel senso della misura μ caratterizzante il sistema stesso). Il tempo di primo ritorno dipende dalla grandezza dell'intorno scelto.

Nel caso discreto il tempo di ritorno di x in A

$$\tau_A(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \phi^n(x) \in A\}$$

che è infinito nel caso di non ritorno in A . Sostanzialmente il Teorema 2.1.1 afferma che $\tau_A(x) < \infty$ $\mu - Q.O$ per ogni A μ -misurabile.

Questo teorema fornisce un risultato di esistenza, ma non garantisce che il tempo di ritorno sia ragionevolmente piccolo. È naturale chiedersi come vari questo tempo in funzione dell'intorno di x scelto. Nelle sezioni successive forniremo delle stime del tempo di ritorno in alcuni casi, usando il Teorema di Kac (2.3.1).

2.2 Teorema ergodico

Dato l'obiettivo della teoria ergodica, ecco la definizione dei concetti di media temporale e spaziale di una funzione f .

Definizione 2.2.1 (Media temporale della funzione f). Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e (M, μ, ϕ) un sistema dinamico. La funzione $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\bar{f}(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} f(\phi^s(x))$$

o nel caso continuo

$$\bar{f}(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\phi^s(x)) ds$$

è detta, se esiste, **media temporale** della funzione f .

Oltre alla media temporale, per caratterizzare l'evoluzione di una funzione rispetto ad un sistema dinamico, possiamo definire la media di fase come segue:

Definizione 2.2.2 (Media di fase). Si dice **media di fase** $\langle f \rangle$ di f , ben definita per ogni f sommabile ($f \in L_1(M, \mu)$), il seguente valore numerico

$$\langle f \rangle := \int_M f d\mu. \tag{2.1}$$

Risulta abbastanza chiaro, note le definizioni delle due medie, che l'esistenza della media temporale per la funzione f è più rara rispetto alla sua media di fase. Quest'ultima richiede infatti semplicemente che la funzione sia sommabile, sotto queste ipotesi è sufficiente calcolare o stimare l'integrale 2.1. Per ricavare la media temporale è invece necessario conoscere il flusso del sistema dinamico, che in genere non si può calcolare. Rimane quindi aperta una domanda: esistono delle ipotesi entro le quali dalla media in fase $\langle f \rangle$ di f si può ricavare la sua media temporale \bar{f} ?

Teorema 2.2.1 (Teorema ergodico di Birkhoff-Kinchin). *Sia (M, μ, ϕ) un sistema dinamico astratto discreto, non necessariamente invertibile; sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile. Allora esiste quasi ovunque in M il limite*

$$\bar{f}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} f(\phi^s(x)),$$

e inoltre si ha

$$\bar{f}(\phi(x)) = \bar{f}(x), \quad \langle \bar{f} \rangle = \langle f \rangle.$$

Se il sistema è invertibile, si ha che

$$\bar{f}_-(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} f(\phi^{-s}(x))$$

esiste quasi ovunque, e quasi ovunque coincide con $\bar{f}(x)$.

Per una dimostrazione del Teorema 2.2.1 si veda la dimostrazione B delle appendici di [4].

Il Teorema 2.2.1 risponde alla domanda posta in precedenza e assicura che la media temporale \bar{f} di f esiste quasi ovunque in M per funzioni sommabili. Inoltre essa è invariante rispetto al flusso e, se mediata nello spazio, coincide con la media sullo spazio delle fasi di f stessa.

2.3 Proprietà di un sistema ergodico

Si consideri un sistema dinamico classico (M, μ, ϕ) . Definiamo le seguenti proprietà.

Proprietà 1. Per ogni $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(M, \mu)$, media temporale e media in fase coincidono quasi ovunque:

$$\bar{f}(x) = \langle f \rangle, \mu\text{-q.o. in } M$$

Un sistema che soddisfa questa proprietà ha un comportamento medio uguale sia che lo si osservi allo scorrere del tempo, sia che lo si osservi, ad un tempo fissato, al variare dello spazio. È una proprietà molto forte, spesso difficile da verificare, ecco quindi che può risultare utile la seguente:

Proprietà 2. Dato un insieme $A \subset M$ μ -misurabile, il tempo medio di soggiorno del sistema in A è quasi ovunque uguale alla sua misura:

$$\tau_A(x) = \mu(A) \mu\text{-q.o. in } M \text{ dove:}$$

$$\tau_A(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_A(\phi^s(x)) ds$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa proprietà ha implicazioni, anche intuitive, molto significative: fornisce una visione probabilistica del comportamento di un sistema dinamico, riferendosi all'uguaglianza tra il tempo medio di permanenza in A del sistema e la misura $\mu(A)$, ossia la probabilità che 'spazialmente' il sistema si trovi nell'insieme A . In questo contesto quindi il volume assume significato di probabilità.

Già con questa proprietà possiamo trarre delle considerazioni su alcuni esempi visti nel capitolo precedente, come riguardo la traslazione sul toro in cui le orbite si addensano sullo spazio. Infatti quando un sistema dinamico classico soddisfa la Proprietà 2 le orbite si addensano sull'intero spazio. In un sistema dinamico classico, tutti gli aperti sono misurabili e hanno misura strettamente

positiva. Per cui il tempo di permanenza dell'orbita di x in un generico aperto di M è proporzionale alla misura dello stesso. Di conseguenza l'orbita si addensa in un qualsiasi aperto $A \subset M$. Inoltre in un sistema dinamico classico M è varietà differenziabile, per cui in particolare ammette base al più numerabile di aperti. Segue il risultato desiderato, dato che l'orbita di x si addensa su ognuno di questi aperti e quindi, in particolare, su tutto lo spazio M .

Proprietà 3. *Non esistono integrali del moto sommabili non banali:*

$$f(\phi^t(x)) = f(x) \forall t \text{ q.o. in } M \implies f \text{ costante q.o. in } M,$$

data una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile.

Con la proposizione 2.3.1 mostreremo l'equivalenza di queste quattro proprietà. Dall'equivalenza tra la seconda e la terza segue immediatamente che se un sistema dinamico ammette almeno un integrale del moto non banale, allora le orbite non possono addensarsi nello spazio delle fasi.

Proprietà 4. *Il sistema dinamico non si può scomporre metricamente, cioè*

$$\phi^{-t}(A) = A \implies \mu(A) \in \{0, 1\}$$

per ogni $A \subset M$ misurabile. (Ovvero ogni scomposizione misurabile e invariante è metricamente banale).

Definizione 2.3.1. Un sistema dinamico (M, μ, ϕ) si dice **ergodico** se soddisfa una qualsiasi delle quattro proprietà.

La Proprietà 4 fornisce una interpretazione geometrica del comportamento di un sistema ergodico, affermando che gli unici insiemi fissi rispetto al flusso sono gli insiemi metricamente banali.

Non è importante quale delle proprietà venga soddisfatta infatti:

Proposizione 2.3.1. *Le quattro proprietà caratterizzanti l'ergodicità sono equivalenti.*

La seguente dimostrazione è un'espansione della traccia che si può trovare nella Proposizione 4.1 di [4].

Dimostrazione. Per dimostrare le quattro equivalenze, mostriamo le seguenti quattro relazioni:

1. Proprietà 1 \implies Proprietà 2
2. Proprietà 2 \implies Proprietà 4
3. Proprietà 4 \implies Proprietà 1
4. Proprietà 4 \iff Proprietà 3

Proprietà 1 \implies Proprietà 2

Questa direzione è una conseguenza immediata, infatti la Proprietà 2 è un caso particolare della Proprietà 1. Supposta vera la Proprietà 1 e posta $f = \chi_A$, si ha che

$$\langle f \rangle = \int_M \chi_A(x) d\mu = \int_A d\mu = \mu(A),$$

$\bar{f}(x) = \tau_A(x)$ e quindi vale la Proprietà 2.

Proprietà 2 \implies Proprietà 4

Supponiamo esista un $A \subset M$ invariante non banale, ossia tale che

$$\mu(A) \notin \{0, 1\} \text{ e } \phi^{-t}(A) = A \forall t.$$

Segue quindi che $\chi_A(\phi^s(x)) = 1 \forall x \in A \forall s$. A questo punto abbiamo che

$$T_A(x, t) = \int_0^t \chi_A(\phi^s(x)) ds = \int_0^t 1 ds = t,$$

ovvero

$$\tau_A(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} T_A(x, t) = 1.$$

Ma ciò è assurdo dato che abbiamo supposto A non metricamente banale e quindi non varrebbe la Proprietà 2. Segue quindi la Proprietà 4.

Proprietà 4 \implies Proprietà 1

Questo punto comporta dimostrare che un sistema metricamente indecomponibile ha media spaziale e temporale coincidenti. Possiamo quindi supporre per assurdo che le due medie siano diverse, ed in particolare che $\bar{f} > \langle f \rangle$ (senza perdere di generalità, per l'altra disuguaglianza tutti i ragionamenti sono analoghi) su un insieme a misura positiva strettamente. Definiamo poi l'insieme

$$A = \{x \in M \mid \bar{f}(x) > \langle f \rangle\}$$

che nel caso fosse misurabile, ha certamente misura non nulla per quanto ipotizzato in precedenza. Sfruttiamo ora il teorema di Birkhoff-Kinchin (2.2.1) per garantire la misurabilità di tale insieme e mostrare che è non metricamente banale ($\mu(A) \neq 1$). Il teorema qui citato garantisce infatti che per funzioni in $L_1(M, \mu)$ si ha media temporale invariante rispetto al flusso, ovvero

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(\phi(x)).$$

Essendo la media spaziale indipendente dal flusso, naturalmente vale il seguente risultato:

$$\bar{f}(x) > \langle f \rangle \implies \bar{f}(\phi(x)) > \langle f \rangle$$

e quindi A è invariante rispetto al flusso. Rimane ora da dimostrare che è misurabile e non banale metricamente. Per funzioni sommabili il teorema di Birkhoff garantisce l'esistenza quasi ovunque in M della media temporale. Prendiamo quindi come funzione sommabile $f(x) = \chi_A(x)$, ora siccome \bar{f} esiste quasi ovunque in M (e ciò deve quindi valere anche in $A \subset M$), segue

$$\langle \bar{f} \rangle = \langle f \rangle.$$

Allora anche la media in fase è ben definita quasi ovunque. Ciò garantisce che esiste l'integrale:

$$\langle \chi_A(x) \rangle = \int_M \chi_A(x) d\mu = \int_A d\mu = \mu(A)$$

e quindi A è misurabile. Per raggiungere l'assurdo, è necessario escludere la possibilità che $\mu(A) = 1$, così da ottenere una scomposizione di M metricamente non banale. Ad inizio dimostrazione abbiamo supposto che A avesse quelle caratteristiche, tuttavia si potrebbero trarre le stesse considerazioni sull'insieme $B = \{x \in M \mid \bar{f}(x) > \langle f \rangle\}$. In particolare anche $\mu(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$, per cui quantomeno si ha $\mu(A) < 1 - \mu(B)$ e quindi $\mu(A) < 1$. Ecco che abbiamo ottenuto una scomposizione metricamente non banale, il che è assurdo dato che valeva per ipotesi la Proprietà 4.

Proprietà 3 \iff Proprietà 4

Mostriamo entrambe le direzioni negando la tesi così da ottenere la negazione dell'ipotesi. Partiamo da Proprietà 3 \implies Proprietà 4, supponendo quindi falsa la Proprietà 4. In tal caso esiste un insieme A invariante e non banale. Ciò implica necessariamente che la funzione caratteristica χ_A sia un integrale di moto non banale, infatti

$$\phi^t(x) \in A \forall t > 0, x \in A \implies \chi_A(\phi^t(x)) = \chi_A(x)$$

Quindi ciò prova che non vale la Proprietà 3 dato che χ_A è integrale del moto non banale (vale 1 in A , 0 altrimenti).

Per mostrare la seconda direzione, supponiamo falsa la Proprietà 3. Esiste quindi un integrale del moto f non costante quasi ovunque, cioè $f(\phi^t(x)) = f(x)$, $\forall t$, q.o. in M . Ma allora segue immediatamente il risultato che stiamo cercando, infatti per un'opportuna $c \in \mathbb{R}$ è non metricamente banale l'insieme

$$A = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}.$$

Esso risulta inoltre invariante rispetto al flusso, dato che se $f(x) < c$ allora anche $f(\phi^t(x)) < c$. Il che dimostra la negazione della Proprietà 4 e quindi conclude l'equivalenza. \square

Da un punto di vista fisico, l'ergodicità è una proprietà importante ma spesso troppo generale o insufficiente per poter trarre alcune conclusioni. È troppo generale nel senso che riguarda l'enorme classe delle funzioni sommabili. Talvolta è invece insufficiente perché non coinvolge l'idea del raggiungimento di uno stato di equilibrio e nemmeno l'idea che la dinamica sia irregolare o caotica.

Come anticipato nella sezione 2.1.1, ecco un teorema che consente di effettuare stime numeriche dei tempi di ritorno in un insieme $A \subset M$ misurabile.

Teorema 2.3.1 (Teorema di Kac). *Sia (M, μ, ϕ) un sistema dinamico ergodico, $A \subset M$ μ -misurabile e*

$$n(x) = \inf\{t \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \phi^t(x) \in A\} \text{ con } x \in A.$$

Allora vale la seguente

$$\int_A n(x) d\mu = 1.$$

e il tempo medio del primo ritorno in A è inversamente proporzionale alla misura dell'insieme A :

$$\langle n(x) \rangle = \frac{\int_A n(x) d\mu}{\mu(A)} = \frac{1}{\mu(A)}$$

in cui $\mu(A) = \int_A d\mu$.

Tale teorema formalizza un fatto piuttosto intuitivo: il tempo di primo ritorno in un dato insieme per sistemi dinamici ergodici, è inversamente proporzionale alla misura dell'insieme stesso. Ossia, più è piccolo l'insieme, più è lungo il tempo prima di tornarvi.

È importante notare, prima di passare oltre, che la misura da utilizzare deve essere normalizzata, altrimenti nel momento in cui si vanno ad analizzare sistemi su domini aventi lunghezze caratteristiche molto piccole, i tempi di ritorno sarebbero assurdamente grandi nonostante magari l'insieme in analisi sia molto grande rispetto al dominio complessivo.

2.4 Alcuni esempi di sistemi ergodici

Proposizione 2.4.1 (Ergodicità traslazione su \mathbb{T}^2). *La trasformazione*

$$\phi^t(x, y) = (x + v_x t, y + v_y t) \pmod{1}, \quad v_x, v_y \in \mathbb{R},$$

con $v = (v_x, v_y)$ velocità, è ergodica se e solo se $\alpha = \frac{v_x}{v_y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Come già dimostrato nella proposizione 1.2.1, la traslazione sul toro è periodica se e soltanto se $\alpha \in \mathbb{Q}$. Chiaramente quindi abbiamo la dimostrazione in almeno una direzione molto agevolata. Supponiamo ora il sistema ergodico. Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$, abbiamo quindi una dinamica periodica e non densa in \mathbb{T}^2 . Segue che la Proprietà 2 perde di validità, il che è assurdo dato che abbiamo supposto il sistema ergodico. In conclusione se il sistema è ergodico allora necessariamente $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Per dimostrare invece che se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si ottiene un sistema ergodico, possiamo supporre $f \in L_2(M, \mu)$ e quindi costruirne lo sviluppo in serie di Fourier da comporre poi con il flusso ϕ . In questo modo è possibile valutare sotto quali ipotesi i due sviluppi così trovati vanno a coincidere, ossia quando f è integrale del moto.

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k e^{2\pi i k \cdot x}$$

$$f(\phi(x)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_k e^{2\pi i k \cdot (x+vt)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} [\hat{f}_k e^{2\pi i (k \cdot v)t}] e^{2\pi i k \cdot x}$$

La seconda sommatoria è ottenuta semplicemente identificando con x un generico punto del toro e scrivendo quindi il flusso del sistema come $\phi^t(x) = x + vt$. A questo punto non resta che verificare quando questa funzione generica f è costante del moto, ossia quando le due sommatorie si uguagliano. Possiamo passare ad un'uguaglianza tra le singole componenti della sommatoria, ottenendo così:

$$\hat{f}_k [e^{2\pi i (k \cdot v)t} - 1] = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2, t \in \mathbb{R}$$

Perché sia vera tale uguaglianza deve azzerarsi il termine tra parentesi o il coefficiente di Fourier \hat{f}_k . La parentesi però non può azzerarsi se $\alpha = \frac{v_x}{v_y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dato che dovrebbe essere uguale ad un rapporto tra numeri razionali, il che sarebbe assurdo. Infatti

$$k \cdot v = k_1 v_x + k_2 v_y = 0 \iff \frac{v_x}{v_y} = -\frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}.$$

Quindi non resta che la possibilità $\hat{f}_k = 0$ che comporta f quasi ovunque costante. Vale quindi la Proprietà 3, ed in particolare il sistema è ergodico. \square

Proposizione 2.4.2 (Ergodicità della mappa del panettiere). *La trasformazione del panettiere definita nella sezione 1.4 è ergodica.*

Per mostrare tale proposizione, si possono sfruttare molti risultati. Potremmo usare concetti più forti quali la mescolanza, si possono analizzare i comportamenti degli insiemi invarianti rispetto al flusso ϕ , oppure l'isomorfismo con lo shift di Bernoulli. Vogliamo però utilizzare il concetto di **varietà instabile** che è importante per analizzare più accuratamente un sistema dinamico. Pur non utilizzando tale concetto nella sua profondità, in seguito ad una breve introduzione vedremo di adoperare tale varietà per dimostrare la proposizione 2.4.2.

In un sistema dinamico classico (non necessariamente), una volta individuati i punti stazionari, detti anche di equilibrio, è possibile associarvi le relative varietà stabili ed instabili. Fissato quindi uno di tali punti $p \in M$, le varietà associate sono degli insiemi definiti come segue:

$$V_{stabile} = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x) = p\},$$

$$V_{instabile} = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(x) = p\}.$$

In parole semplici quindi, diciamo varietà stabile di p l'insieme dei punti $q \in M$ che all'avanzare del tempo si muovono verso l'equilibrio p , la sua varietà instabile è invece l'insieme dei punti da esso respinti.

Vediamo quindi di sfruttare questo concetto per dimostrare la proposizione 2.4.2, espandendo la traccia fornita nella Sezione 2.4, Esempio 38 di [9].

Dimostrazione. La mappa del panettiere non è una mappa continua. Per affermarlo basta prendere una coppia di punti vicini all'asse "separatrice" $x = \frac{1}{2}$ ($p = (\frac{1}{2} - \epsilon, \bar{y}), q = (\frac{1}{2} + \epsilon, \bar{y}), \epsilon > 0$), infatti proprio per la modalità con cui tale trasformazione agisce, quello alla sinistra di essa verrà mappato in un punto completamente diverso dall'immagine del punto alla destra. L'unico punto fisso della trasformazione è l'origine $(0, 0)$, che in qualità di equilibrio possiede una varietà instabile V , eventualmente vuota.

In questo caso, l'insieme contiene tutte le rette a coordinate y razionali con denominatore potenza del 2. Per la densità dei numeri razionali sui reali (e quindi in particolare sul dominio M), abbiamo che la varietà instabile di $(0, 0)$ è densa in M . Di conseguenza, si ha che nessun punto di tale insieme può appartenere ad un eventuale invariante del moto, che a causa della densità di V in M , deve essere banalmente costante ed uguale a $f(0, 0)$.

In conclusione vale la Proprietà 3 e quindi il sistema è ergodico. \square

Mostriamo ora un'applicazione del Teorema di Kac. Supponiamo di analizzare una dinamica ergodica qualsiasi, per esempio la trasformazione del panettiere che con la proposizione 2.4.2 abbiamo mostrato essere ergodica. Prendiamo un punto $x \in M = [0, 1] \times [0, 1]$ e un raggio $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(x) \subset M$ (intorno di raggio ϵ centrato in x). Essendo tale sistema dotato della misura di Lebesgue, l'insieme $A = B_\epsilon(x)$ ha misura $\mu(A) = \pi\epsilon^2$. Quindi per esempio se $\epsilon = 10^{-3}$ si ha che il tempo di ritorno in A è $T \sim 10^6$. Ovvero già valutando il ritorno in intorni non eccessivamente piccoli del punto, si ottengono tempi molto elevati.

2.5 Sistemi mescolanti

La mescolanza (mixing) di un sistema dinamico (M, μ, ϕ) può essere caratterizzata, come per l'ergodicità, da due proprietà equivalenti:

Proprietà 1. Per ogni coppia di insiemi misurabili $A, B \subset M$ risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\phi^{-t}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Proprietà 2. Data una qualsiasi coppia di funzioni a quadrato sommabile, $f, g \in L_2(M, \mu)$ risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M (f \circ \phi^t)g \, d\mu = \int_M f \, d\mu \int_M g \, d\mu,$$

o in forma più compatta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle (f \circ \phi^t)g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle.$$

Definizione 2.5.1 (Sistema mescolante). Un sistema è mescolante se vale una delle due precedenti proprietà (1 e 2).

Il mescolamento è una nozione fondamentale nella teoria ergodica. In altri termini un sistema si dice mescolante se per ogni coppia di insiemi misurabili A e B la misura dell'intersezione tra $\phi^{-t}(A)$ con B converge al prodotto delle misure $\mu(A)\mu(B)$. Più semplicemente, dopo un tempo sufficientemente lungo ogni insieme A si diffonderà ugualmente su tutto lo spazio (il suo contributo su ogni insieme B sarà proporzionale alla misura dell'insieme stesso).

Proposizione 2.5.1. Ogni sistema mescolante è ergodico. Non è vero il viceversa.

Dimostrazione. Il primo risultato è semplice da verificare, infatti la proprietà di mixing (mescolamento) implica immediatamente l'indecomponibilità metrica. Supponiamo infatti di avere un insieme A che sia invariante rispetto al flusso ϕ^t ovvero che $\phi^t(A) = A$. A questo punto essendo il sistema mescolante, segue che:

$$\mu(\phi^t(A) \cap A) \rightarrow \mu(\phi^t(A))\mu(A) = \mu(A)\mu(A)$$

da cui si può ricavare naturalmente che $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$, ovvero che A è un insieme metricamente banale (Proprietà 4 dell'ergodicità verificata).

Per verificare che non è vero il viceversa, basta presentare un controesempio.

Consideriamo un sistema dinamico discreto molto semplice che non fa altro che scambiare i due elementi dello spazio di partenza ad ogni iterazione.

Sia $X = \{0, 1\}$, $T : X \rightarrow X$ con $T(0) = 1$ e $T(1) = 0$, ovvero $T(x) = 1 - x$. Come misura basta utilizzare la cardinalità (normalizzata rispetto a $|X|$) dell'insieme in analisi. Questo sistema è ergodico perché gli insiemi invarianti rispetto al flusso sono semplicemente \emptyset e X , la cui misura è banale.

Inoltre questo sistema è non mescolante perché non esiste il seguente limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\{\phi^t(0)\} \cap \{1\})$$

in quanto ad ogni iterazione la misura di tale intersezione varia. □

Il concetto di mescolanza è legato alla proprietà di correlazione di una funzione. Definiamo la **funzione di correlazione** G come segue

$$G(t) = \langle (f \circ \phi^t) g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle.$$

Il motivo per cui la mescolanza è rilevante rispetto all'andamento di questa funzione G è che al crescere del parametro temporale, in un sistema mescolante tale funzione assume valori sempre più piccoli, tendendo a 0 all'infinito. Possiamo anche definire in questo caso f e g debolmente indipendenti. La progressiva incorrelazione che si verifica è proprio dovuta alla dinamica nella quale queste funzioni vengono immerse, che porta gli insiemi a diluirsi nello spazio.

Vediamo ora la dimostrazione della mescolanza dell'automorfismo algebrico di \mathbb{T}^2 . Può essere utile tale dimostrazione non solo perché implica l'ergodicità del sistema, ma perché a livello matematico è ricca di ragionamenti e consente di individuare le proprietà che rendono mescolante un sistema dinamico.

Proposizione 2.5.2. *L'automorfismo algebrico di \mathbb{T}^2 è un sistema mescolante.*

La dimostrazione seguente è una rielaborazione di ciò riportato nella dimostrazione della Proposizione 5.3 di [4].

Dimostrazione. Sia A la matrice che definisce il flusso del sistema definito nella Sezione 1.3, ovvero

$$\phi(x) = Ax \pmod{1}$$

. Le funzioni $u_k(x) = e^{2\pi i k \cdot x}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, sono una base ortogonale dello spazio $L_2(M, \mu)$. Infatti ogni funzione a quadrato sommabile possiede uno sviluppo in serie di Fourier (le u_k sono quindi un sistema di generatori per il precedente spazio). Gli u_k sono anche linearmente indipendenti dato che

$$\begin{aligned} \langle u_k, u_l \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} u_k \bar{u}_l d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i(k-l) \cdot x} d\mu \text{ per } k \neq l \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi(k-l) \cdot x) d\mu = 0. \end{aligned}$$

Una volta definita questa base, mostriamo la sua chiusura rispetto al flusso dell'automorfismo algebrico. Sia \hat{A} intesa come A trasposta.

$$u_k \circ \phi = u_k(Ax) = e^{2\pi i(k \cdot Ax)} = e^{2\pi i(\hat{A}k \cdot x)} = u_{\hat{A}k}$$

Trascurando ora il caso banale in cui $k = 0$, si ha che la traiettoria di k è $\{\hat{A}^t k, t \in \mathbb{Z}\}$ che è un insieme aperto e in particolare si ha divergenza all'infinito dell'orbita per $k \in \mathbb{Z}^2$, questo a causa del fatto che A espande tutti i vettori, tranne quelli appartenenti alla retta contraente (che ha tuttavia pendenza irrazionale, infatti l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ di A con modulo minore di 1, è $v = (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1)$). Prendiamo ora $f, g \in L_2(M, \mu)$, entrambe sono naturalmente approssimabili arbitrariamente bene tramite somme finite di funzioni di base u_k moltiplicate per opportuni coefficienti. Fissiamo quindi $\epsilon > 0$, esiste quindi un $K \in \mathbb{N}$ tale che

$$f = f^{\leq K} + f^{> K} \quad f^{\leq K} = \sum_{|k| \leq K} \hat{f}_k u_k,$$

e si ha quindi $\|f^{>K}\|_2 < \epsilon$, e lo stesso vale per g dato che si può sempre scegliere un K sufficientemente grande per tagliare le frequenze ad esso superiori in modo che ciò che viene escluso abbia norma minore di ϵ . Scelto quindi un t sufficientemente grande si ha che

$$\langle (f^{\leq K} \circ \phi^t) g^{\leq K} \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle = 0;$$

il motivo di questo risultato è che

$$f^{\leq K} \circ \phi^t = \sum_{|k| \leq K} \hat{f}_k u_{\hat{A}^t k}$$

$$\left\langle \left(\sum_{|k| \leq K} \hat{f}_k u_{\hat{A}^t k} \right) g^{\leq K} \right\rangle = \sum_{|k|, |l| \leq K} \hat{f}_k \hat{g}_l \langle u_{\hat{A}^t k} u_l \rangle,$$

Ma quanto dimostrato fino ad ora ci permette di trarre le dovute conclusioni, infatti per t sufficientemente grande e $k \neq 0$ si ha $|\hat{A}^t k| > K$. Inoltre

$$\langle u_{\hat{A}^t k}, u_l \rangle \neq 0 \text{ se e solo se } \hat{A}^t k = l$$

Ma ciò accade solamente quando $k = l = 0$ e quindi per ogni t si ha

$$|\langle (f^{\leq K} \circ \phi^t) g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle| < c\epsilon$$

per qualche c costante. Data l'arbitrarietà di ϵ , si può affermare che vale la Proprietà 2 della mescolanza. □

La dimostrazione appena vista evidenzia molto bene come per ammettere mescolamento in un sistema dinamico sia necessaria una base ortogonale in $L_2(M, \mu)$, chiusa rispetto a composizioni con il flusso, nella quale tutti gli elementi (tranne la funzione costante) portino alla generazione di orbite aperte (ossia abbiano un comportamento irreversibile).

Quindi ecco che abbiamo mostrato anche l'ergodicità per uno tra gli esempi introdotti in precedenza (dato che la mescolanza è un concetto più forte).

Chiaramente, essendo la *traslazione sul toro* (Sezione 1.2) un'isometria essa non può essere un sistema mescolante. Un'isometria è una trasformazione che preserva la misura degli insiemi ai quali viene applicata, non vale quindi la Proprietà 1. Infatti, si ha che questo sistema dinamico trasla rigidamente ogni insieme A .

Mostriamo che tale sistema non è mescolante prendendo due insiemi $A, B \subset M$ qualunque. Per tale sistema il limite di $\mu(\phi^t(A) \cap B)$ non esiste, in quanto le immagini di A rispetto al flusso variano rigidamente ad ogni istante. In particolare tale misura non può tendere a $\mu(A)\mu(B)$ e quindi il sistema non è mescolante.

Capitolo 3

Superfici di Traslazione

Focalizzando l'attenzione su una particolare classe di sistemi dinamici classici, i biliardi, è utile introdurre i concetti di genere di una superficie, superficie piatta, superficie di traslazione, flusso geodetico, poligono razionale e alcune relative proprietà. Essi saranno particolarmente utili per studiare le dinamiche dei biliardi nel prossimo capitolo.

Definizione 3.0.1 (Genere di una superficie). Il genere di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è un numero intero non negativo che denota il massimo numero di curve semplici chiuse disgiunte che si possono disegnare su di essa senza sconnetterla.

Il genere di una superficie è un invariante topologico, ossia se due spazi hanno genere diverso allora non sono omeomorfi. In particolare nel caso di una varietà topologica S , si può affermare che tutte le varietà ad essa omeomorfe, hanno lo stesso genere.

Nel caso di superfici orientabili, il genere coincide con il numero di buchi che la superficie possiede. Su una sfera, per esempio, qualsiasi curva semplice chiusa genera due componenti connesse distinte (in qualunque caso infatti si originano una calotta superiore ed una inferiore). Quindi la sfera ha genere 0 (infatti ha zero buchi).

Il toro, invece, avendo un buco, ha genere 1, infatti è possibile tracciare una curva chiusa lungo una delle due circonferenze generatrici (tracciate nella Figura 3.1) senza sconnetterlo. Non è possibile tracciarvi qualsiasi altra curva semplice chiusa disgiunta senza sconnetterlo.

Questa caratterizzazione del genere è intuitiva ma non troppo operativa. D'altro canto il genere si può calcolare utilizzando anche la caratteristica di Eulero, che è un altro invariante combinatorio per le superfici, per determinare il quale faremo ricorso al concetto di triangolazione.

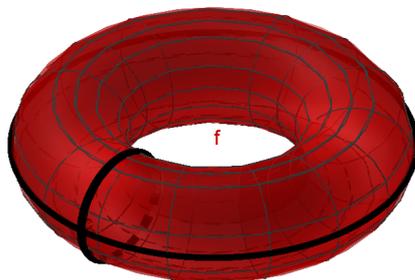


Figura 3.1: Rappresentazione tridimensionale del toro

Definizione 3.0.2 (Triangolazione [1]). Data una superficie S , si dice triangolazione T di S una qualunque sua partizione, i cui elementi sono omeomorfi a triangoli di \mathbb{R}^2 , detti facce della triangolazione T . Inoltre ogni coppia t_1, t_2 di triangoli deve soddisfare una delle seguenti proprietà:

- Sono tra loro disgiunti;
- Condividono esattamente un lato e i suoi due estremi (vertici);
- Condividono esattamente un vertice.

L'intersezione di una faccia con il bordo di S , se non vuota, consiste di vertici o lati interi e ogni vertice del bordo di S è vertice di almeno una faccia della triangolazione.

Qui di seguito, nella Figura 3.2, sono rappresentati tre triangoli che coprono parte di un quadrato. A sinistra abbiamo tutti elementi consentiti dalla Definizione 3.0.2, a destra si infrangono tali proprietà.

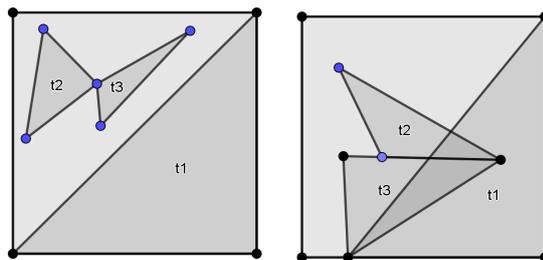


Figura 3.2: A sinistra ci sono tre triangoli che possono essere parte della stessa triangolazione in quanto presi a due a due soddisfano tutti una delle tre proprietà della precedente definizione. A destra ci sono invece tre triangoli che non possono essere tutti parte della stessa triangolazione, perché non le rispettano.

In una triangolazione T di una superficie S , ogni lato appartiene ad esattamente una faccia della triangolazione se è contenuto in ∂S , a due facce altrimenti. Ogni triangolo ha anche tre vertici e tre lati.

Osserviamo che:

Teorema 3.0.1. *Ogni superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ ammette almeno una triangolazione.*

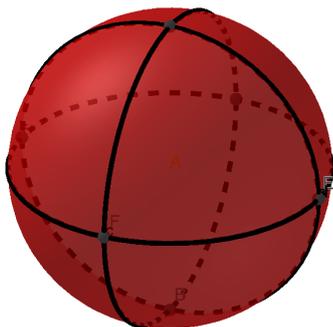
Per la dimostrazione di questo teorema e qualche risultato ulteriore si veda la sezione 6.2 di [1]. Per una superficie S dotata di una triangolazione T , vale la seguente:

Proposizione 3.0.1 (Formula di Eulero). *Sia S una superficie connessa e dotata di una triangolazione T , allora per la coppia (S, T) vale la formula di Eulero:*

$$\chi(S) = f - e + v = 2 - 2g \quad (3.1)$$

dove f è il numero delle facce, e il numero dei lati, v il numero dei vertici di T , g il genere della superficie S e $\chi(S)$ la caratteristica di Eulero della superficie.

Prima di passare oltre mostriamo con due esempi il calcolo del genere tramite la Formula 3.1 di Eulero. Partendo dalla sfera, possiamo fornire una triangolazione composta da 8 facce, come la seguente:



In questo caso si ha $f = 8$, $e = 12$, $v = 6$ e quindi

$$f - e + v = 8 - 12 + 6 = 2 = 2 - 2g,$$

ritroviamo $g = 0$, come già visto in precedenza. Analizziamo poi l'esempio del toro, fornendo una triangolazione ancora in 8 facce:

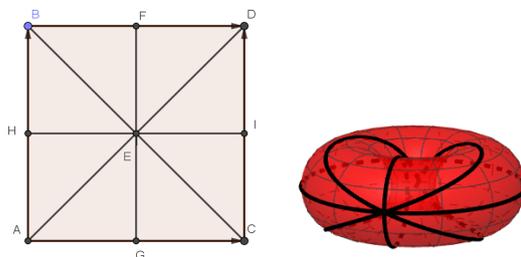


Figura 3.3: Triangolazione consentita del toro, a sinistra rappresentata sul toro piatto, a destra riportata in tre dimensioni

Osserviamo che la triangolazione presentata nella Figura 3.3 è consentita perché anche in seguito all'identificazione a due a due dei lati paralleli del quadrato, si preserva la validità delle proprietà della Definizione 3.0.2, come si può vedere anche nella Figura a destra. In effetti vale la Formula di Eulero: $f = 8$, $e = 12$, $v = 4$ portano ad avere $8 - 12 + 4 = 0 = 2 - 2(1)$ e quindi $g = 1$ come già noto.

Per completezza, nella Figura 3.4 esibiremo una triangolazione del quadrato che a causa dell'identificazione dei lati per generare il toro, non è consentita per quest'ultimo.

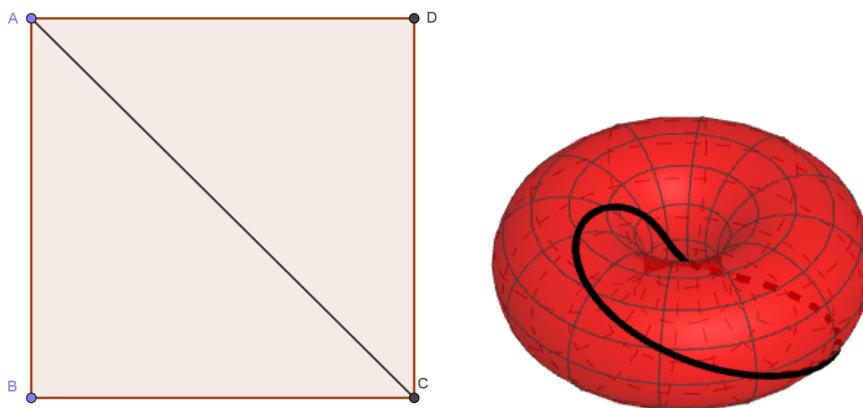


Figura 3.4: Non è una triangolazione consentita perché i due triangoli che sono definiti sul quadrato a sinistra, hanno un lato ed un solo vertice in comune

Come ci si può aspettare, essendo la Formula di Eulero valida per una qualsiasi triangolazione, il genere di una superficie è indipendente dalla scelta della triangolazione: si può dire una proprietà invariante rispetto alle triangolazioni.

Ogni superficie, può essere dotata di una metrica piatta con la sola precisazione che tale metrica può avere eventuali punti singolari ([24]).

I biliardi che analizzeremo nel seguente capitolo saranno definiti su domini piatti, aventi delle proprietà particolari. Per introdurli, partiamo dal concetto più generale di superficie piatta, definito come segue:

Definizione 3.0.3 (Superficie piatta [24]). Si dice superficie piatta una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ che possiede un numero finito di singolarità coniche¹ e altrove è localmente isometrica al piano euclideo.

Ad esempio la superficie del cubo rappresenta una sfera piatta con 8 singolarità coniche, corrispondenti ai vertici del cubo. La metrica non ha singolarità sugli spigoli del cubo dato che ogni punto su essi possiede un intorno che se disteso è isometrico² ad un dominio sul piano Euclideo. La degenerazione della

¹Ricordiamo che per singolarità coniche si intendono punti della superficie aventi un intorno isometrico ad un intorno del vertice di un cono

²La nozione di superficie piatta è più complessa di quanto definito qui, la si definisce solitamente piatta a tratti ed è necessario dotarla di una triangolazione. In particolare tale superficie è dotata di una misura che coincide con quella 2-dimensionale di Lebesgue su ogni triangolo T del piano Euclideo, di conseguenza la superficie piatta così definita è uno spazio metrico. Per la tesi non è necessaria una definizione così precisa, per ulteriori approfondimenti si veda [19],[8]

metrica sugli spigoli è semplicemente un'illusione dovuta alle singolarità introdotte immergendo la sfera piatta nello spazio Euclideo \mathbb{R}^3 . Qualsiasi intorno dei vertici è invece isometrico ad un intorno del vertice di un cono.

Avendo una superficie dotata di una metrica, è naturale studiarne le geodetiche. Essendo la superficie dotata di una metrica piatta, le geodetiche saranno localmente isometriche a delle rette del piano \mathbb{R}^2 . Sono molte le domande che ci si possono porre relativamente ad esse, spesso fondamentali anche nell'analisi delle dinamiche dei biliardi.

Rispetto alle geodetiche, sono attualmente aperti molti problemi. Ad esempio la descrizione del comportamento di una generica geodetica su una superficie piatta oppure la dimostrazione che il flusso geodetico (vedi 3.0.5) è ergodico su una particolare superficie piatta. Inoltre, non è noto se ogni superficie piatta abbia almeno una geodetica chiusa che non attraversa punti singolari, e in caso affermativo quante siano.

Avvicinandoci alle superfici che ci interessano principalmente per il prossimo capitolo, è importante evidenziare che una geodetica sul toro mantiene sempre la direzione iniziale. Si interseca con se stessa se e solo se è chiusa. Se non è chiusa è allora densa sul toro.

Questa proprietà relativa alle intersezioni delle geodetiche non caratterizza solo il toro, ma quella classe di superfici piatte dette **superfici di traslazione** con ologonomia triviale (o superfici "molto" piatte). Ecco quindi una formalizzazione di questo concetto guidata dalle note delle Lezioni 2 e 3 della scuola estiva di Fisica Matematica [20], e dalla fonte [23] elencata in Bibliografia.

Definizione 3.0.4 (Superficie di traslazione). Si dice superficie di traslazione la superficie ottenuta identificando a coppie, mediante traslazioni, i lati di una collezione di poligoni piani.

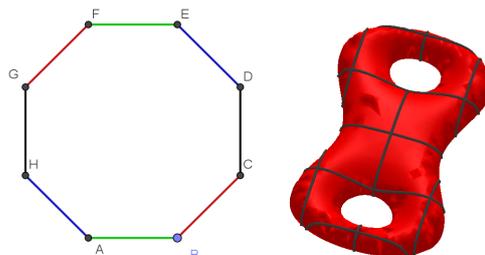


Figura 3.5: A sinistra è mostrata la rappresentazione 2 dimensionale del toro doppio di destra, dove sono identificati mediante la stessa colorazione a due a due i lati di un ottagono regolare.

Più chiaramente, data una collezione di poligoni P_1, \dots, P_n , tutti contenuti nel piano \mathbb{R}^2 , se essi sono tali che per ogni lato s del poligono generico P_i esiste un lato s' di un poligono diverso della collezione P_j con :

- s parallelo ad s'
- s congruente a s'

allora $S = \bigcup(P_i)/\sim$ è la superficie risultante, detta *superficie di traslazione*, dove lo spazio quoziente è ottenuto dopo aver “incollato” le coppie di lati s, s' che rispettano le condizioni sopra elencate.

La relazione di equivalenza che si introduce, preserva le orientazioni. Infatti la direzione è ben definita sui lati. Sui vertici, invece, la nozione di direzione non è definita e per questo motivo sono chiamati singolarità (coniche). Per non trascurare questo concetto, è bene riferirsi ad un esempio semplice, il cubo.

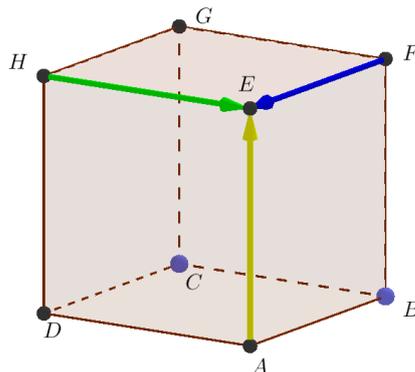


Figura 3.6: Cubo, anche considerabile sfera piatta con 8 singolarità coniche

Come si può osservare nella Figura 3.6, nel vertice E il concetto di direzione non è ben definito dato che in un qualsiasi suo intorno le direzioni sono tra loro ortogonali e puntano tutte ad E .

Definizione 3.0.5 (Flusso geodetico). Sia S una superficie. Il flusso geodetico ϕ_t^θ su S nella direzione θ manda un punto $P \in S$ al punto $\phi_t^\theta(P)$ raggiunto muovendosi a velocità unitaria lungo la geodetica di S in direzione θ .

Questi flussi saranno di fondamentale importanza nel seguente capitolo, in quanto corrispondenti alle traiettorie di un biliardo le quali si distendono tutte a formare un segmento di retta, rispettando quindi le medesime proprietà.

Come anticipato, è interessante analizzare quando una geodetica è chiusa e quando invece si addensa sul dominio. Per esempio, come già visto nella Proposizione 1.2.1, nel caso di flusso geodetico sul toro con direzione della geodetica $c = (v_1, v_2)$, si verifica uno dei due seguenti casi:

- Se $\frac{v_1}{v_2}$ è razionale allora le traiettorie individuano geodetiche chiuse.
- Se $\frac{v_1}{v_2}$ è irrazionale allora il flusso è ergodico.

Non essendovi problemi di direzione al di fuori delle singolarità, sulle superfici di traslazione possiamo definire un flusso che si muove lungo una linea retta.

Quando si parla di superfici di traslazione è conveniente introdurre anche il concetto di poligono razionale. Infatti ogni poligono razionale consente di generare una superficie di traslazione mediante un numero finito di sue riflessioni. Questa costruzione verrà chiarita nella Sezione 4.3.2.

Definizione 3.0.6 (Poligono razionale). Un poligono semplicemente connesso $P \subset \mathbb{R}^2$ i cui angoli $\theta_1, \dots, \theta_n$ sono multipli razionali di π è detto razionale.

Di conseguenza, in un poligono razionale, si ha che per ogni vertice i

$$\theta_i = \frac{p_i}{q_i} \pi, \quad p_i, q_i \in \mathbb{Z}.$$

Tra gli esempi semplici di poligoni razionali si può pensare ad un rettangolo o a triangoli con angoli opportuni (ad esempio equilatero), che saranno i domini sui quali ci concentreremo nel prossimo capitolo. Alcuni esempi sono rappresentati nella Figura 3.7. La peculiarità di questi poligoni è che mediante riflessioni rispetto ai lati del poligono, si ottengono solo un numero finito di copie del poligono originale tra esse distinte.

Questa costruzione, che studieremo in seguito per analizzare una generica traiettoria di un biliardo, è il motivo per cui lo studio dei biliardi razionali (aventi un poligono razionale come “tavolo”) è meno complicato rispetto a quello di biliardi su domini non poligonali o poligoni irrazionali.

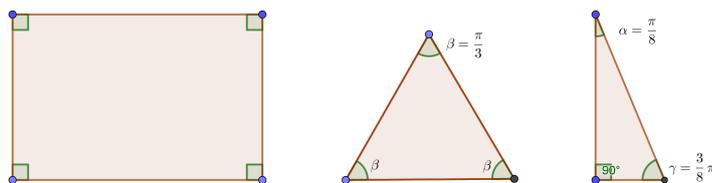


Figura 3.7: Rappresentazione di tre poligoni razionali

Capitolo 4

Biliardi

Nella Sezione 1.5 abbiamo introdotto la nozione di biliardo. In questo capitolo ci concentreremo su biliardi con tavoli definiti mediante poligoni razionali, e in particolare sulla costruzione di Katok-Zemliakov, sull'ergodicità e sull'esistenza di traiettorie periodiche.

Sia $M = \overline{Q} \times S^1$. Il dominio del sistema dinamico che analizzeremo, cioè l'insieme già definito in 1.5, è:

$$N = \{q = (p, \theta) \in \partial Q \times S^1 \mid \langle \theta, n(p) \rangle \geq 0, \} \subset M$$

dove $\overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$, il “tavolo” del biliardo, è un poligono razionale nel caso dei biliardi razionali. θ rappresenta invece l'angolo formato dalla traiettoria con la tangente alla parete nel punto $p \in \partial Q$.

Il flusso è

$$T : N \rightarrow N \text{ con } T(p, \theta) = (p', \theta'), (p, \theta), (p', \theta') \in N$$

dove p' è il punto del successivo impatto della particella con la parete e θ' è la direzione di uscita dall'impatto.

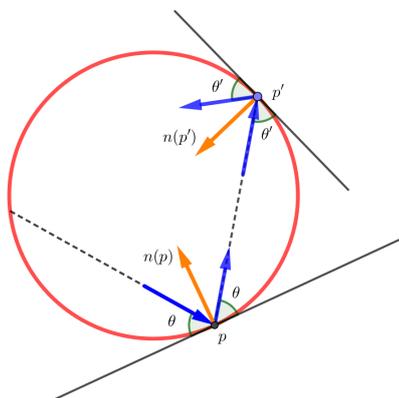


Figura 4.1: Rappresentazione di una coppia ordinata di elementi di N . È messa in evidenza la validità delle leggi dell'ottica geometrica.

Nelle prossime sezioni discuteremo dell'esistenza di traiettorie periodiche, cioè l'insieme dei punti che vengono visitati periodicamente dalla dinamica che ha origine in un certo punto $(p, \theta) \in N$.

Definizione 4.0.1 (Traiettoria periodica). La traiettoria di $(p, \theta) \in N$ è periodica se esiste $\tau > 0$ (periodo) tale che

$$T^{t+\tau}(p, \theta) = T^t(p, \theta) \quad \forall t,$$

Inoltre, ogni sistema dinamico classico ha misura invariante rispetto al flusso. Mostriamo quindi quale misura rispetta questa proprietà per i biliardi. Si parametrizzi la curva ∂Q con la funzione $x : S^1 \rightarrow \partial Q$, $s \rightarrow x(s) \in \partial Q$, dove $s \in S^1$. Allora vale la seguente

Proposizione 4.0.1 (Misura invariante biliardi). *Il flusso $T : N \rightarrow N$ preserva l'area data dall'elemento d'area*

$$w = \sin \theta \, ds \wedge d\theta.$$

In altri termini definita la misura

$$\mu(A) = \int_A \sin \theta \, d\theta \, ds, \quad A \subset N,$$

si ha $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \subset N$

Dimostrazione. Si indichino con θ_i gli angoli di incidenza formati con la tangente al bordo nel punto $x(s_i) \in \partial Q$. Si definisca $H(s_1, s_2) = d_{\mathbb{R}^2}(x(s_1), x(s_2))$. Si ha

$$\frac{\partial H(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\cos \theta_1, \quad \frac{\partial H(s_1, s_2)}{\partial s_2} = \cos \theta_2.$$

Quindi

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H(s_1, s_2)}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial H(s_1, s_2)}{\partial s_2} ds_2 = \\ &= -\cos \theta_1 ds_1 + \cos \theta_2 ds_2. \end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$0 = d^2 H = \sin \theta_1 d\theta_1 \wedge ds_1 - \sin \theta_2 d\theta_2 \wedge ds_2,$$

come volevasi dimostrare. □

4.1 Dalla meccanica ai biliardi sui triangoli

Le motivazioni dietro allo studio delle dinamiche sui biliardi sono molte, sia di carattere puramente matematico che di tipo applicativo. I biliardi sono spesso utilizzati per testare proprietà e caratteristiche generali dei sistemi dinamici, in quanto al variare della loro forma hanno comportamenti molto vari e di diversi livelli di complessità. Dal punto di vista applicativo, inoltre, essi forniscono

modelli di molte situazioni fisiche.

Una tra le più semplici con essi modellizzabile è la dinamica degli urti tra due particelle vincolate a scorrere su un'asta ideale, come riportato anche nelle note della Lezione 1 di [20]. Si consideri un sistema formato da due punti materiali di massa m_1, m_2 vincolati a scorrere su un'asta rigida, mostreremo che gli urti elastici di essi possono essere modellizzati da un biliardo triangolare.

Poniamo l'asta rigida tra due pareti a distanza unitaria (si veda la Figura 4.2). Indichiamo con x_i la distanza del punto di massa m_i dalla parete di sinistra, $i \in \{1, 2\}$, avendo quindi $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$. Siano v_1, v_2 rispettivamente le velocità dei due punti materiali.

Per la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto, valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1 + \frac{1}{2}m_2v_2 &= \frac{1}{2}m_1v'_1 + \frac{1}{2}m_2v'_2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v'_1 + m_2v'_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove v'_1, v'_2 sono le velocità che i due punti materiali acquisiscono dopo l'urto elastico. Introducendo il cambio di variabile $y_i = \sqrt{m_i}x_i$, $i \in \{1, 2\}$ si ottiene la seguente:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \implies 0 \leq y_1 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \leq y_2 \leq \sqrt{m_2}. \quad (4.2)$$

Il dominio composto dagli (y_1, y_2) che soddisfano 4.2 definisce un triangolo rettangolo che sta sopra la retta $y_2 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}y_1$ di angolo acuto θ con $\tan \theta = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.

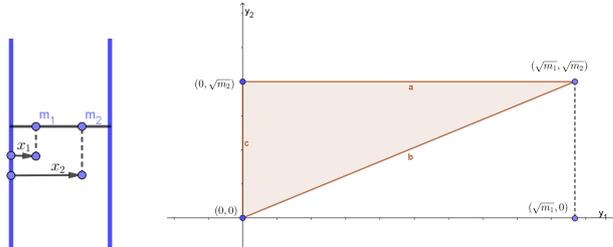


Figura 4.2: Alla sinistra è rappresentata la situazione che si sta modellizzando, mentre alla destra è raffigurato il triangolo che descrive il dominio in seguito al cambio di variabile introdotto

Il cambio di variabile trasforma le equazioni 4.1 nelle seguenti:

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 &= \hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 \\ (u_1, u_2) \cdot (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}) &= (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \cdot (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

con $u_i = \sqrt{m_1}v_i$ e $\hat{u}_i = \sqrt{m_i}v'_i$, $i \in \{1, 2\}$. La prima equazione in 4.3 afferma che la norma due del vettore velocità è un invariante del sistema dinamico, mentre la seconda afferma che la riflessione preserva l'angolo di incidenza formato con la tangente al bordo. In sintesi si hanno riflessioni elastiche, come deve essere per un biliardo.

4.2 Biliardi su triangoli

In questa sezione l'attenzione è posta sui biliardi a dominio triangolare, che nonostante la semplicità della forma portano ad alcuni problemi tuttora aperti. Considereremo solamente le traiettorie regolari, ossia che non passano dai vertici del poligono. I vertici del poligono formano un insieme a misura nulla, per cui la supposizione di considerare solo traiettorie regolari non porta a perdite di generalità.

Ogni risultato presentato in questa sezione è invariante rispetto alla scalatura dei lati del triangolo.

Alcune domande che ci possiamo porre per analizzare un biliardo di forma triangolare (ed in realtà anche biliardi definiti su “tavoli” con qualsiasi altra forma) sono le seguenti:

1. Come si può studiare il comportamento della generica traiettoria regolare in un triangolo qualsiasi? Il flusso è ergodico?
2. Esiste sempre una traiettoria periodica? Ed eventualmente continua ad esistere a seguito di lievi deformazioni del biliardo?
3. Se esiste una traiettoria periodica, quante ce ne sono simili ad essa? Quali sono quelle più “corte”¹ di L ?

Mostriamo un risultato classico circa l'esistenza di traiettorie periodiche sui biliardi triangolari.

Teorema 4.2.1 (Fagnano). *Ogni biliardo definito su un triangolo acutangolo ammette una traiettoria periodica.*

Per mostrare l'esistenza di un cammino chiuso che congiunge tre punti sui lati del triangolo, basta presentare la famosa traiettoria di Fagnano. Essa collega i piedi delle tre altezze del triangolo, come nella Figura 4.3. Tale percorso chiuso esiste certamente poiché per i triangoli acutangoli l'ortocentro è interno al triangolo, per cui i piedi delle altezze stanno necessariamente sui lati e non su loro prolungamenti esterni.

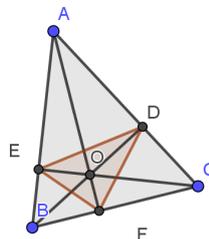


Figura 4.3: Traiettoria di Fagnano

Resta però da dimostrare che questa sia effettivamente una traiettoria di biliardo, ossia che i lati del triangolo di Fagnano rispettino le leggi di riflessione

¹Rispetto alla metrica indotta sul poligono dal piano \mathbb{R}^2 nel quale il poligono è immerso.

dell'ottica geometrica.

Ora analizzeremo dapprima una dimostrazione euristica di questo risultato usando la tecnica della distensione delle traiettorie tipica dell'analisi delle dinamiche dei biliardi (Katok-Zemliakov: Sezione 4.3.1), in seguito è esposta una dimostrazione sintetica basata su similitudini e congruenze di angoli.

Dimostrazione. (EURISTICA) La costruzione di Katok-Zemliakov che mostriamo nella Sezione 4.3.1 si basa su un'idea semplice: quando una traiettoria incontra una parete, invece di riflettere la traiettoria sulla parete, si riflette tutto il biliardo rispetto alla parete stessa e si prolunga la traiettoria linearmente fino ad incontrare una parete nel biliardo riflesso e quindi ripetere la procedura. La traiettoria lineare risultante da queste riflessioni è detta *distensione della traiettoria* originale.

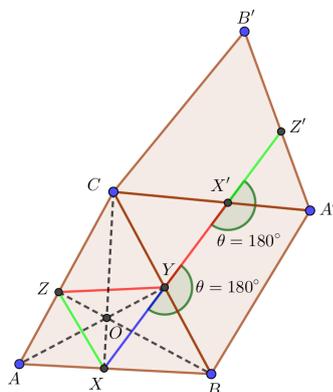


Figura 4.4: È rappresentata la distensione della traiettoria di Fagnano su un segmento di retta.

Se per ogni lato del triangolo acutangolo originario scegliamo un punto e li congiungiamo, otteniamo un nuovo triangolo (lo diciamo triangolo inscritto). Vogliamo quindi mostrare che il triangolo che si genera congiungendo i tre piedi delle altezze D, E, F ha lati che seguono le leggi della riflessione ottica rispetto alle pareti del biliardo. Se tali lati rispettassero le leggi ottiche, la loro distensione porterebbe a segmenti di rette. Il concetto di distensione di una traiettoria verrà chiarito nella Sezione 4.3.1.

Il risultato della distensione della traiettoria di Fagnano è mostrato chiaramente nella Figura 4.4 a sinistra. La distensione su un segmento è dovuta proprio al fatto che angoli di incidenza ed emissione sono tra loro sempre congruenti. \square

Osservazione. *Se il triangolo inscritto avesse i lati che non rispettano le leggi dell'ottica, la "traiettoria" rappresentata dai suoi lati si distenderebbe su un segmento di spezzata, non di retta. Il motivo è semplicemente che gli angoli formati con il bordo del biliardo non sono congruenti.*

Per una dimostrazione sintetica rigorosa vanno usate similitudini e cerchi circoscritti. Qui di seguito ne è riportata una possibile versione che segue la traccia di [12].

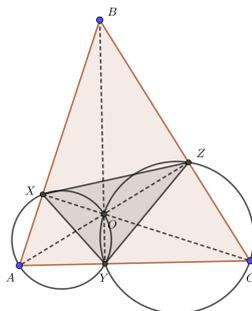


Figura 4.5: Costruzione di Fagnano che verrà usata nella dimostrazione sintetica

Dimostrazione. Prendiamo in analisi il triangolo acutangolo con relativo triangolo di Fagnano in esso inscritto raffigurato nella Figura 4.2. Mostriamo che angoli di incidenza e di emissione sono tra loro congruenti per ogni punto di impatto della traiettoria con il bordo del triangolo. Lo verificheremo per un solo punto di incidenza tra essi, per i restanti due il ragionamento è analogo.

Consideriamo il quadrilatero $OZCY$. Esso ha $\widehat{OYC} \equiv \widehat{OZC} \equiv \frac{\pi}{2}$. Quindi è inscrivibile in una circonferenza. Segue che gli angoli \widehat{OYZ} e \widehat{OCZ} sono congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco \widehat{OZ} . Quindi $\widehat{OYZ} \equiv \widehat{OCZ}$.

Consideriamo poi il triangolo \widehat{BCX} , nel quale l'angolo \widehat{BXC} è retto. Di conseguenza gli angoli \widehat{B} e \widehat{ZYC} sono congruenti perché complementari di angoli congruenti. Ovvero $\widehat{B} \equiv \widehat{ZYC}$.

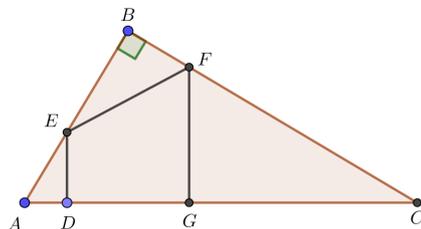
Per concludere, consideriamo il quadrilatero $XOYA$, con $\widehat{OXA} \equiv \widehat{XYA} \equiv \frac{\pi}{2}$. Analizziamo quindi la circonferenza circoscritta, da cui emerge che $\widehat{XAO} \equiv \widehat{XYO}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Quindi $\widehat{B} \equiv \widehat{AYX}$ perché complementari di angoli congruenti e, per transitività della relazione di congruenza, $\widehat{AYX} \equiv \widehat{ZYC}$.

Iterando il ragionamento per le altre due coppie di angoli di incidenza/emissione segue la dimostrazione completa. \square

Come mai nel Teorema 4.2.1 di Fagnano è necessaria l'ipotesi che il triangolo sia acutangolo? Perché la traiettoria utilizzata per mostrare il teorema non è una traiettoria di biliardo propriamente detta nel caso di triangoli rettangoli o ottusangoli.

Trattiamo il problema separatamente.

Per i triangoli rettangoli basta prendere un punto qualsiasi su un cateto (che non sia vertice) e tracciare la traiettoria:



La traiettoria periodica evidenziata in questo modo è formata dai punti D, E, F, G, F, E, D sul bordo. Quindi finché si parla di triangoli con angoli $\alpha_i \leq \frac{\pi}{2}$ non c'è nessun problema a trovare traiettorie periodiche.

Per i triangoli ottusangoli invece la traiettoria di Fagnano non è più una traiettoria compatibile con la dinamica del biliardo, dato che l'ortocentro è all'esterno del triangolo. Al momento sono state trovate traiettorie periodiche solo per particolari classi di triangoli di questo tipo, non si ha però un risultato generale. La ricerca di traiettorie periodiche in triangoli ottusi è quindi ancora un problema aperto.

Per quanto riguarda l'ergodicità e il numero di traiettorie periodiche più corte di L rimandiamo la trattazione alla Sezione 4.3

4.3 Biliardi razionali

Come già definito in 3.0.6, un poligono razionale è un poligono i cui angoli interni sono multipli razionali di π . Questa particolare proprietà ci permette di mostrare come da ogni poligono razionale si possa costruire una superficie di traslazione. La costruzione che ci permette di effettuare questo passaggio è detta costruzione di Katok-Zemiliakov. Sottolineiamo che non tutte le superfici di traslazione si possono far risalire ad un poligono razionale.

4.3.1 Costruzione di Katok-Zemliakov

Una traiettoria in un biliardo emessa in una direzione $\theta \in S^1$ cambia direzione dopo la prima riflessione, poi ancora dopo la seconda, e così via; ma quante volte può assumere una direzione diversa dalle precedenti?

Definizione 4.3.1 (Biliardo razionale). Si dice biliardo razionale un biliardo definito su un insieme $Q \subset \mathbb{R}^2$ ("tavolo" del biliardo) che è poligono razionale.

In ogni biliardo razionale, una traiettoria può assumere solo un numero finito di direzioni, ecco il motivo per cui sono più semplici da analizzare e per cui permettono di generare superfici di traslazione.

Consideriamo un biliardo rettangolare. In questo caso la traiettoria può andare in ogni momento verso quattro possibili direzioni. Appena la traiettoria incontra una parete e cambia direzione, possiamo riflettere il rettangolo sul

lato colpito dalla traiettoria e proseguire in linea retta la traiettoria invece di rifletterla nel biliardo originale. Per costruzione, ogni lato di ogni copia del biliardo è identificato con esattamente un lato di un'altra copia del biliardo. Questa costruzione è spesso detta di Katok-Zemliakov e porta ad originare una superficie di traslazione:

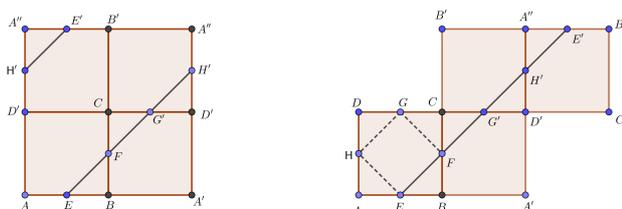


Figura 4.6: A sinistra si vede una linea chiusa sul toro piatto. A destra se ne vede la distensione, infatti è descritta la stessa traiettoria con la costruzione di Katok-Zemliakov a partire dalla traiettoria periodica del biliardo di bordo $ADCB$.

Con questo semplice esempio abbiamo anche mostrato che sul biliardo quadrato/rettangolare esiste una traiettoria periodica. È vero anche per i biliardi definiti su poligoni razionali differenti?

Prima di proseguire vediamo alcuni risultati relativi all'esistenza di orbite periodiche in biliardi razionali.

Proposizione 4.3.1 (Stepin). *In ogni biliardo razionale esiste un'orbita periodica.*

Per trovare una tra tali orbite, si può partire da un lato qualsiasi. Si fa partire una traiettoria da un lato del biliardo, in direzione perpendicolare ad esso. Per il Teorema di ricorrenza (2.1.1), esiste necessariamente un istante in cui la traiettoria andrà a toccare il lato da cui si è partiti in un punto arbitrariamente vicino a quello iniziale. Inoltre, dato che le direzioni assunte dalla traiettoria sono in numero finito (perché biliardo razionale), uno tra gli istanti in cui tale traiettoria torna vicino al punto iniziale, lo farà con direzione ortogonale al lato stesso. A quel punto, la dinamica ripercorre lo stesso percorso al contrario tornando al punto iniziale.

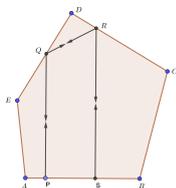


Figura 4.7: Traiettoria periodica su un biliardo pentagonale.

Inoltre si possono accostare a questo risultato di esistenza anche altri teoremi come il seguente:

Teorema 4.3.1 (Masur). *Per ogni biliardo razionale, l'insieme delle direzioni $\theta \in S^1$ tali che esiste un'orbita periodica in direzione θ è denso in S^1 .*

Per mostrare tale teorema si fa riferimento al concetto di differenziale quadratico e cilindro metrico che non sono stati nominati in queste pagine, lasciamo quindi questo risultato senza dimostrazione. Questi risultati sull'esistenza delle traiettorie periodiche sono stati tratti da [11]. L'esistenza di orbite periodiche è una questione ancora aperta per biliardi non razionali generici, come per i triangoli ottusangoli.

Seguendo il ragionamento riportato da S. Tabachnikov nel libro [18], mostriamo perché una generica traiettoria di un biliardo razionale possa assumere un numero finito di direzioni.

Per tenere traccia delle direzioni assumibili da una traiettoria su un biliardo razionale (definito sul poligono Q), introduciamo il gruppo delle riflessioni $G(Q)$. Per ogni lato di Q , tracciamo una retta parallela passante per l'origine. Diciamo $G(Q)$ il gruppo delle isometrie del piano generate dalle riflessioni su queste rette. Quando una traiettoria del biliardo si riflette su un lato di Q , la sua direzione cambia grazie ad un'azione del gruppo $G(Q)$. Il gruppo $G(Q)$ è finito nel caso di Q poligono razionale. Inoltre se i suoi angoli sono $\theta_i = \frac{p_i}{q_i}\pi$, con $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ coprimi, detto $N = mcm(q_i)$ si ha che $G(Q)$ è generato dalle riflessioni sulle rette passanti per l'origine che formano tra loro angoli di π/N . Questo è anche detto il gruppo diedrale D_N , ovvero il gruppo delle simmetrie del poligono regolare con N lati. Esso ha $2N$ elementi e, di conseguenza, l'orbita di un generico punto $\theta \neq k\frac{\pi}{N} \in S^1$ è composta da $2N$ punti. Per concludere, una traiettoria sul biliardo Q può assumere al più $2N$ direzioni differenti.

Una volta mostrato come le copie del biliardo originale necessarie a descrivere una qualsiasi traiettoria sia finito, si può affermare che identificando le coppie di lati tra loro paralleli e congruenti nella collezione di poligoni generata dalle riflessioni del poligono originale, si ottiene una superficie di traslazione.

Ecco un esempio di quanto detto fino ad ora in questa sezione:

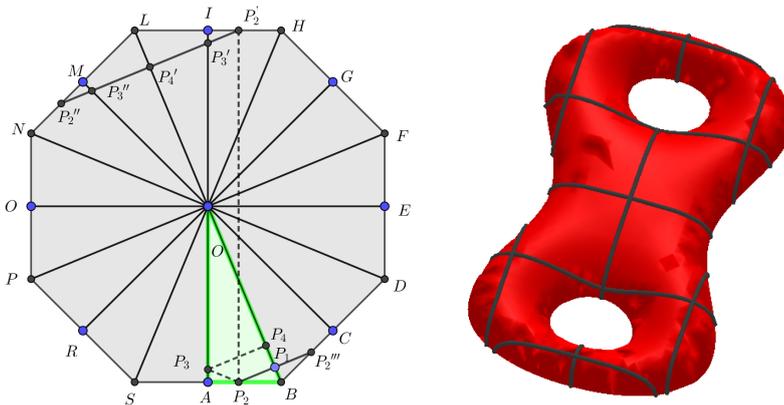


Figura 4.8: Nell'immagine qui sopra si possono vedere a sinistra il toro doppio (piatto) ottenuto come superficie di traslazione mediante distensione di una traiettoria periodica sul biliardo triangolare evidenziato in verde, mentre a destra la sua ricostruzione in tre dimensioni mediante identificazione dei lati dell'ottagono tra loro paralleli. Tale superficie ha genere due.

4.3.2 Biliardo sul quadrato

Il quadrato è un poligono razionale, di angoli tutti uguali a $\frac{\pi}{2}$. Quanto visto nella Sezione 4.3.1 ci permette di dire che le direzioni possibili in tale biliardo sono quattro. In effetti, per descrivere una qualunque traiettoria su un biliardo quadrato bastano 4 riflessioni del biliardo originale, come mostrato nell'Immagine 4.6.

Era rimasta in sospeso dalle precedenti sezioni la discussione del numero di traiettorie periodiche lunghe meno di L e dell'ergodicità dei biliardi sui poligoni razionali.

Grazie alla costruzione di Katok-Zemliakov, si è visto che la lunghezza di una traiettoria può essere misurata semplicemente valutando la lunghezza del segmento sulla quale tale traiettoria si distende. Supponiamo quindi di avere una traiettoria periodica distesa che congiunge l'origine $(0,0)$ con il punto $(2p, 2q)$. Se p, q sono coprimi, allora questa traiettoria è periodica unica mentre se hanno un divisore comune diverso da 1, tale traiettoria genera una famiglia di traiettorie periodiche.

La lunghezza della traiettoria in analisi è $2\sqrt{p^2 + q^2}$ e la variazione di p e q altera la pendenza della retta a cui tale segmento appartiene. Per trovare il numero di traiettorie periodiche più corte di L (nel senso della metrica indotta dal piano \mathbb{R}^2), che indicheremo con $N(L)$. Dobbiamo contare quante coppie di interi coprimi sono contenuti nel cerchio di raggio $\frac{L}{2}$ centrato nell'origine. Infatti p e q devono soddisfare $2\sqrt{p^2 + q^2} < L$.

Una prima approssimazione della quantità $N(L)$ è quindi

$$N(L) \simeq \frac{L^2}{4}\pi$$

di cui però se ne prende solo la metà perché le traiettorie che terminano in $(-p, q)$ e $(p, -q)$ sono analoghe e lo stesso vale per la coppia (p, q) e $(-p, -q)$. Per ora siamo quindi arrivati a dire

$$N(L) \simeq \frac{L^2}{8}\pi.$$

Per raffinare ulteriormente la stima di $N(L)$, dobbiamo ricordare che i due numeri p, q devono essere coprimi. Per sfruttare tale proprietà, utilizziamo la funzione zeta di Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ed in particolare la proprietà che la probabilità che s numeri scelti a caso siano coprimi è data da $\frac{1}{\zeta(s)}$ (per una sua dimostrazione si veda [13]). Nel nostro caso saremo quindi interessati alla $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, il che implica:

$$N(L) \simeq \pi \frac{L^2}{8} \frac{1}{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{3}{4} \frac{L^2}{\pi}$$

Parlare di ergodicità in generale su biliardi razionali (e non) è complesso, richiede delle nozioni teoriche ulteriori. Per cui ci limitiamo a riprendere il

discorso fatto relativamente all'ergodicità del flusso sul biliardo quadrato. Già nella Sezione 1.2 è stata mostrata l'ergodicità di alcune traiettorie lineari sul toro e la periodicità di altre.

Per mostrare che le traiettorie sul biliardo quadrato corrispondono alle geodetiche sul toro, si possono utilizzare approcci molto differenti. Per una strategia generale che utilizza le sfere piatte, si veda la Sezione 2.1 “Billiards in Polygons” di [23].

Come già noto, una traiettoria definita sul biliardo quadrato si distende su un segmento di retta sulla costruzione di Katok-Zemliakov. Se si identificano opportunamente, con delle traslazioni, i lati paralleli delle riflessioni del biliardo originale, si genera un toro piatto. La distensione di una generica traiettoria sul biliardo quadrato originale si trasforma in una retta sul toro piatto costruito con questa procedura. La costruzione appena descritta è rappresentata nella Figura 4.6.

In particolare le traiettorie con direzione iniziale razionale sono periodiche, nel caso sia invece irrazionale si ottengono orbite che si addensano sullo spazio e sono quindi ergodiche.

Capitolo 5

Appendice: Implementazioni numeriche

5.1 Traslazione sul toro

```
clear all;
close all;

a = 1/800;
b = 1/600;

F = @(x,y) mod([x+a;y+b],[1;1]);
figure;
Q = [0.1,0.1];
plot(Q(1),Q(2),'*', 'MarkerSize',20);

k = 3000;

for time = 1:k
    Q(:) = F(Q(1),Q(2));

    if (abs(Q(1)-1)<1e-15)
        Q(1) = 0;
    end
    if (abs(Q(2)-1)<1e-15)
        Q(2) = 0;
    end
    hold on;
    axis([0 1 0 1]);
    plot(Q(1),Q(2),'*', 'MarkerSize',3);
    pause(0.001)
end
```

5.2 Automorfismo algebrico di \mathbb{T}^2

```
clear all;
close all;
A = [1, 1;1, 2];
F = @(x,y) mod(A*[x;y],[1;1]);
%% Creazione quadrato
a = 20;
x = linspace(0,0.2,a);
count = 0;
figure;
for i = x
    for j = x
        count = count + 1;
        Q(count,1) = i;
        Q(count,2) = j;
        hold on;
        axis([0 1 0 1]);
        plot(Q(count,1),Q(count,2),'*');
    end
end
%% Iterazione della mappa 'times' volte
times = 10;
for k = 1:times
    figure;
    for i = 1:count
        Q(i,:) = F(Q(i,1),Q(i,2));
        hold on;
        axis([0 1 0 1]);
        plot(Q(i,1),Q(i,2),'*');
    end
end
end
```

5.3 Trasformazione del panettiere

```
%Trasformazione del panettiere
clear all;
close all;

f = @(x,y) [2*x;y/2];      %x<1/2
g = @(x,y) [2*x-1;y/2+1/2]; %x>=1/2

n= 500;
%Creo quadrato
Q = zeros(n*n,2);
figure;
for i = 1:n
    Q(i,:) = rand(1,2)/2+1/4;
    hold on;
    axis([0 1 0 1]);
    subplot(3,2,1);
    plot(Q(i,1),Q(i,2),'+', 'MarkerSize',3);
    title(0);
end

times = 5;
for k = 1:times
    for m = 1:n
        P = Q(m,:);
        if P(1) < 1/2
            Q(m,:) = f(P(1),P(2));
        elseif P(1) >= 1/2
            Q(m,:) = g(P(1),P(2));
        end
        hold on;
        subplot(3,2,k+1);
        axis([0 1 0 1]);
        plot(Q(m,1),Q(m,2),'+', 'MarkerSize',3);
        title(k);
    end
end
end
```


Bibliografia

- [1] M. Abate e F. Tovena. *Curve e superfici*. 2006.
- [2] M. Badino. «The foundational role of ergodic theory». In: *Foundations of science* (2006).
- [3] P. Bálint et al. «Chaos and stability in a two-parameter family of convex billiard tables». In: *Nonlinearity* 24.5 (2011), p. 1499.
- [4] G. Benettin. «Introduzione ai sistemi dinamici». 2011.
- [5] L. Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie: 2. Teil*. 'Ergoden' a p. 89 nella ristampa del 1923. J.A. Barth, 1896.
- [6] S. G Brush. «Proof of the impossibility of ergodic systems: The 1913 papers of Rosenthal and Plancherel». In: *Transport Theory and Statistical Physics* 1.4 (1971), pp. 287–298.
- [7] L. A. Bunimovich. «A theorem on ergodicity of two-dimensional hyperbolic billiards». In: *Communications in mathematical physics* 130.3 (1990), pp. 599–621.
- [8] F. Fillastre e I. Izmistiev. «A remark on spaces of flat metrics with cone singularities of constant sign curvatures». 2017. URL: <http://fillastre.perso.math.cnrs.fr/pdf/flat-metrics.pdf>.
- [9] A. Giacobbe. «Sistemi dinamici e misure invarianti». 2008-2009. URL: <http://www.math.unipd.it/~giacobbe/DIDATTICA/SD/ergodica.pdf>.
- [10] J W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics*. New York: Scribner's sons, 1902.
- [11] H. Masur e S. Tabachnikov. «Rational billiards and flat structures». In: 1 (2002), pp. 1015–1089.
- [12] A. Molnar. *Assignment 8: Minimal Triangles*. URL: <http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa11/Molnar/asmt8ram/asmt8ram.html>.
- [13] J. E. Nymann. «On the probability that k positive integers are relatively prime». In: *Journal of number theory* 4.5 (1972), pp. 469–473.
- [14] M. Plancherel. «Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme». In: *Annalen der Physik* 347.15 (1913), pp. 1061–1063.
- [15] A. Rosenthal. «Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasi-ergodenhypothese». In: *Annalen der Physik* 348.6 (1914), pp. 894–904.
- [16] A. Rosenthal. «Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme». In: *Annalen der Physik* 347.14 (1913), pp. 796–806.

- [17] G. Stamatiou. *Motion of a particle in the Bunimovich billiard*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiards#/media/File:BunimovichStadium.svg.
- [18] S. Tabachnikov. *Geometry and billiards*. Vol. 30. American Mathematical Soc., 2005.
- [19] M. Troyanov. «ON THE MODULI SPACE OF SINGULAR EUCLIDEAN SURFACES». 2017. URL: <https://arxiv.org/pdf/math/0702666.pdf>.
- [20] C. Ulcigrai. Lezioni del corso "Mathematical billiards: ergodicity and renormalization, from polygons to the Ehrenfest model". Scuola Estiva di fisica-matematica di Ravello. 4-16 settembre 2017.
- [21] J. Von Plato. «Boltzmann's ergodic hypothesis». In: *Archive for History of Exact Sciences* 42.1 (1991), pp. 71–89.
- [22] G. Zampieri. «Appunti di Sistemi Dinamici». Dispense del corso 'Sistemi dinamici I' (2015/2016) per Laurea in Matematica Applicata a Verona.
- [23] A. Zorich. «Flat geometry on Riemann surfaces and Teichmüller dynamics in moduli spaces». 2008.
- [24] A. Zorich. «Flat surfaces». In: *Frontiers in number theory, physics, and geometry I* (2006), pp. 439–585.